

PEDRO AUGUSTO PEREIRA BORGES
CLEMERSON ALBERI PEDROSO
(Organizadores)

**EXPERIÊNCIAS DE MODELAGEM
NO ENSINO DE
MATEMÁTICA**



edifapes

PEDRO AUGUSTO PEREIRA BORGES
CLEMERSON ALBERI PEDROSO
(Organizadores)

EXPERIÊNCIAS
DE MODELAGEM
NO ENSINO DE MATEMÁTICA

ERECHIM
2022

Todos os direitos reservados à EDIFAPES.

Proibida a reprodução total ou parcial, de qualquer forma e por qualquer meio mecânico ou eletrônico, inclusive através de fotocópias e de gravações, sem a expressa permissão dos autores. Os dados e a completude das referências são de inteira e única responsabilidade dos autores.

Depósito Legal de acordo com a Lei 14/12/2004

Editoração/Diagramação: EdIFAPES

Revisão: Organizadores

Capa: (Assessoria de Marketing, Comunicação e Eventos /URI Erechim)

Conselho Editorial:

Adilson Luis Stankiewicz (URI / Erechim/RS) – Presidente

Arnaldo Nogaró (URI / Erechim/RS)

Cláudia Petry (UPF / Passo Fundo/RS)

Elcemina Lucia Balvedi Pagliosa (URI / Erechim/RS)

Elisabete Maria Zanin (URI /Erechim/RS)

Jadir Camargo Lemos (UFSM / Santa Maria/RS)

Maria Elaine Trevisan (UFSM / Santa Maria/RS)

Michèle Satto (IFMT Cuiabá/MT)

Neila Tonin Agranionih (UFPR / Curitiba/PR)

Sérgio Bigolin (URI / Erechim/RS)

Yuri Tavares Rocha (USP / São Paulo/SP)

E96 Experiências de modelagem no ensino de matemática [recurso eletrônico] /
organização Pedro Augusto Pereira Borges, Clemerson Alberi Pedroso.

- Erechim, RS: EdIFAPES, 2022.
1 recurso *online*

ISBN 978-65-88528-27-3

1. Modelos matemáticos 2. Cálculo numérico 3. Matemática – ensino
I. Borges, Pedro Augusto Pereira. II. Pedroso, Clemerson Alberi

C.D.U.: 51:37

Catálogo na fonte: bibliotecária Sandra Milbrath CRB 1012/78



edIFAPES

Livraria e Editora
Erechim/RS

Sumário

	Apresentação	5
1	O Programa Tracker como facilitador na construção e compreensão de modelos matemáticos <i>Radael de Souza Parolin, Alex Sandro Gomes Leão</i>	7
2	Comparação entre as soluções analítica e numérica de um modelo matemático de cinética química <i>Clemerson Alberi Pedroso, Jaque Willian Scotton</i>	39
3	Experiências com modelagem matemática e equações diferenciais num Curso de Licenciatura em Matemática <i>Delair Bavaresco, Angéli Cervi Gabbi</i>	60
4	Cálculo do volume de silos trincheira <i>Anderson Piva, Bruna Miecowski, Pedro Augusto Pereira Borges</i>	82
5	Uma experiência de ensino do cálculo diferencial e integral a partir da modelagem matemática de circuitos elétricos <i>Flavio Fernandes, Rafael Silva Pippi, Vitor José Petry</i>	103
6	Sólidos de revolução com abordagem de cálculo numérico <i>Radael de Souza Parolin, Matheus Jardim Graces, Renata Alves Rodrigues</i>	141
7	Modelagem matemática do crescimento de plantas de milho <i>Denise Schwendler, Pedro Augusto Pereira Borges</i>	164

Apresentação

Esta obra é uma iniciativa de professores e professoras que conviveram no ambiente dos cursos de Licenciatura de Matemática e/ou do Mestrado em Matemática da UNIJUÍ, onde iniciaram a prática da modelagem que empregam efetivamente em sua atuação nas Universidades (UFFS/Chapecó, URI/Erechim, UNIPAMPA/Itaqui) e Institutos de Educação do Sul do Brasil (IFRS/Bento Gonçalves, IFRS/Ibirubá, IFSC/Chapecó). É também um depoimento, uma amostra, ainda que pequena, da indagação “Como, quem e onde se utiliza modelagem no ensino de Matemática?”.

Os capítulos são relatos de experiências desenvolvidas independentemente entre si, geradas antes mesmo da decisão de publicá-las em livro, resultado da prática natural de ensinar com modelagem, não como uma obrigação, exigência de política educacional ou orientação específica de algum projeto pedagógico institucional, mas como um jeito nosso de ensinar. O desafio de sair da vala comum livresca de teoria-exemplos-exercícios e usar a Matemática para investigar temas reais de nosso interesse, conhecer os aspectos culturais envolvidos, mostrar concreta e detalhadamente as conexões da linguagem matemática com a ciência, a tecnologia, a vida cotidiana e o prazer de ensinar dessa forma, são os ideais compartilhados pelos autores em todos os capítulos.

Relatar nossas práticas foi a forma encontrada para divulgar o que estamos fazendo. Não com a pretensão de estar fazendo algo excepcional ou perfeito, até porque, entendemos, não há uma maneira de ensinar com modelagem, mas maneiras próprias desenvolvidas pela conjugação dos esforços pessoais e coletivos da formação de cada professor. Publicar o que foi feito é a marcação de um momento na provisoriedade de estar constantemente em formação, como

profissional de educação. Implica, por um lado, organizar, refletir, aperfeiçoar e fundamentar a prática em um movimento pessoal de superação de limites, tanto de conhecimentos específicos – em modelagem nem sempre se sabe que conceitos serão necessários para resolver os problemas – quanto de mobilização dos alunos para enfrentar as incertezas e as angústias próprias dos processos de investigação. Afinal, em modelagem é comum saber de onde partimos, mas não aonde chegaremos. Por outro lado, publicar implica pertencer a um coletivo profissional, cuja interação supõe uma via de mão dupla, onde o relato da experiência pessoal contribui com o acervo coletivo e a crítica dos outros, em contrapartida, contribui para o aperfeiçoamento individual.

As experiências relatadas são de interesse de professores de Matemática da Escola Básica e do Ensino Superior que atuam na Licenciatura de Matemática e, particularmente, nas chamadas matemáticas em serviço, aquelas dos cursos das áreas de Ciências Exatas. Os modelos propostos podem ser objetos de estudo tal como estão escritos ou como leituras que inspiram a realização de novos modelos. Em ambos, o estudante poderá aprender, aplicar, agregar novos significados aos conceitos estudados, modificar ou criar seus próprios modelos.

Modelar situações, fenômenos e processos é uma atividade desafiadora, sem roteiro prévio e essencialmente de investigação. A autonomia de criar caminhos de solução é própria da resolução de problemas, assim como o uso concomitante de conhecimentos de outras áreas, experimentos, medições e elaboração de algoritmos computacionais. Fazer modelagem é fazer ciência.

É com o prazer de praticar essas ideias que agradecemos a dedicação e parceria dos nossos alunos co-autores dos capítulos, assim como convidamos os leitores a apreciarem o relato de nossas experiências e a desafiarem-se no mundo do ensino de Matemática com modelagem.

Os autores

O Programa Tracker como Facilitador na Construção e Compreensão de Modelos Matemáticos

*Radael de Souza Parolin*¹

*Alex Sandro Gomes Leão*²

Introdução

A busca por um aprimoramento de nossa prática docente é um processo longo e que se constrói à medida que aprimoramos nossa visão do ensino. Abandonar um processo de ensino tradicional ao qual fomos apresentados desde o instante em que ingressamos na escola não é trivial, pois embora passado pela academia em curso de licenciatura, muito do que aprendemos em nossa profissão foi construído com saberes da prática. Nossos erros e acertos nos possibilitam construir uma identidade própria, e todas essas experiências nos permitem uma (re)construção das práticas buscando um aprimoramento diário de nossa ação docente.

Quando falamos em ensino de conceitos matemáticos para estudantes da licenciatura, não podemos nos ater apenas em como ensinar, porém, precisamos que nossa proposta seja condizente com o

¹ Doutor, Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA).
E-mail: radaelparolin@unipampa.edu.br

² Doutor, Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA).
E-mail: alexleao@unipampa.edu.br

fato de que esse estudante amanhã estará atuando em uma sala de aula e poderá fazer uso de tais métodos para ensinar seus alunos. Logo, ao ensinarmos na licenciatura, precisamos pensar que eles irão amanhã replicar esse ensinamento em suas salas de aulas.

Visando um aprendizado com significado para nossos licenciandos, nos aventuramos a construir propostas que busquem a construção e/ou análise de modelos matemáticos, e para que esses modelos sejam interiorizados, buscamos representar tais fenômenos com auxílio da Modelagem Científica através da análise de fenômenos físicos.

A Modelagem Científica, a partir de uma visão multidisciplinar, visa buscar respostas que possam auxiliar os estudantes a compreenderem o mundo em que vivem, propiciando uma visão mais científica e exploratória dos conceitos a serem tratados (SILVA; DORNELES, 2017). Desse modo, assumimos a modelagem científica como um processo de criação de modelos, que busca compreender a realidade na qual estamos inseridos.

Segundo Barbosa (2001), a Modelagem é vista como uma forma de introduzir novos conceitos e meios para questionar a realidade. O autor ainda destaca que uma atividade de modelagem é uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da matemática e que os conceitos e ideias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento, ou seja, esses conceitos não são conhecidos a priori, e vão sendo conhecidos na medida que são necessários para resolver os problemas.

O trabalho desenvolvido aborda o estudo de modelos físico-matemáticos do movimento com suporte de uma ferramenta computacional e outros recursos básicos, em experimentos direcionados, mas com amplo espaço investigativo e de discussão, característicos da Modelagem Matemática. As atividades foram aplicadas em duas oficinas, nas Semanas Acadêmicas do Curso de Matemática - Licenciatura da UNIPAMPA em Itaqui e dos cursos de Matemática e Física - Licenciaturas do IFFar em São Borja, e nelas

buscamos compreender as vantagens do uso da Modelagem Científica na construção e análise de modelos matemáticos para acadêmicos da graduação em cursos de Matemática - Licenciatura.

Modelagem Científica

Pensar na construção de modelos científicos, perpassa por percebermo-los como a representação de uma ideia, um objeto, evento ou sistema que propicia uma visão de ciência alicerçada no Construtivismo (GILBERT; BOULTER, 1998). É fato que, não podemos pensar nem ensinar a ciência como uma verdade absoluta, fruto de genialidades isoladas, ao contrário, trata-se de vê-la como uma construção humana, construída ao longo de gerações, como já muito bem difundido pela frase de Isaac Newton “Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes”. Pensando dessa forma, concebemos que o trabalho científico nos possibilita a construção de modelos que tem por finalidade oferecer explicações a respeito do mundo no qual vivemos. Um exemplo claro é a pandemia do COVID-19, na qual encontramos um respaldo em modelos científicos para entendermos a propagação da doença. Claro que esses modelos não são únicos, tampouco imutáveis, pois há uma comunidade de especialistas que define os melhores levando em consideração o momento em que se analisa, sendo, portanto, passíveis de evolução (TOULMIN, 1977).

Então, devemos considerar esses fatos ao desenvolvermos propostas de ensino, não podemos mostrar a ciência como pronta e acabada, mas sim como um processo de construção histórica e que evolui com a humanidade.

[...] a ciência deve ser ensinada como um saber histórico e provisório, tentando fazer com que os alunos participem, de algum modo, no processo de elaboração do conhecimento científico, com suas dúvidas e incertezas, e isso também requer deles uma forma de abordar o aprendizado como um processo construtivo, de busca

de significados e de interpretação, em vez de reduzir a aprendizagem a um processo repetitivo ou de reprodução de conhecimentos pré-cozidos, prontos para o consumo. (POZO; CRESPO, 2009, p. 21).

Moreira e Ostermann (1993) enfatizam que o conhecimento científico não é definitivo.

A construção científica não para nunca. O conhecimento científico está sempre evoluindo. É um erro ensinar ciência como se os produtos dela resultassem de uma metodologia rígida, fossem indubitavelmente verdadeiros e conseqüentemente definitivos. O conhecimento científico que temos hoje está baseado em modelos e teorias inventados e que podem estar equivocados ou apenas parcialmente corretos. A Terra como centro do sistema planetário é um modelo que funciona até certo ponto, mas o modelo com o Sol no centro funciona muito melhor. Contudo, a permanente evolução dos modelos científicos não é uma questão meramente funcionalista. Alguns modelos são substituídos por outros porque explicam outras coisas, porque são mais abrangentes, ou seja, não só porque funcionam melhor. (MOREIRA; OSTERMANN, 1993, p. 115).

Se a ciência é mutável, por que então ensinar seus conhecimentos de forma acabada e pronta com explicações absolutas que somente seres iluminados teriam acesso? Acreditamos que o ensino deve seguir um processo reflexivo em que o estudante seja um ser que pensa, que constrói e reflete sobre o fenômeno construído, ou seja, nesse caso buscamos pensar na construção de modelos matemáticos numa perspectiva para o ensino, mas não um ensino de mera transmissão de conhecimentos, um ensino que se constrói a partir da experimentação, que se refaz, que se aprimora, que considera a melhor das hipóteses em cada uma das experiências vivenciadas.

[...] a ciência deve ser ensinada como um saber histórico e provisório, tentando fazer com que os alunos participem, de algum modo, no processo de elaboração do conhecimento científico, com suas dúvidas e incertezas, e isso também requer deles uma forma de abordar o aprendizado como um processo construtivo, de busca de significados e de interpretação, em vez de reduzir a aprendizagem a um processo repetitivo ou de reprodução de conhecimentos pré-cozidos, prontos para o consumo. (POZO; CRESPO, 2009, p. 21).

Gilbert e Boulter (1998) ressaltam o papel dos modelos e da modelagem para o ensino de ciências, propondo quatro motivos que justificam seu posicionamento:

(a) *A ubiquidade do termo modelo no campo da Educação em Ciências*: já que esse é empregado em diferentes momentos, para descrever distintas representações. Há incerteza sobre esse termo gerada pela variedade de modelos científicos, pela sua abrangência e validade.

(b) *O papel desempenhado pelos modelos na condução das ciências*: os modelos são mais acessíveis à percepção que teorias e, assim, essas podem ser testadas experimentalmente.

(c) *A referência da formação de modelos por indivíduo para a compreensão e aprendizagem das ciências*: reforça a importância do estudo dos modelos e da modelagem nas ciências.

(d) *Os modelos definem um papel significativo para a sala de aula*: a busca pela aprendizagem em sala de aula implica que os modelos e a modelagem necessitam ser explorados nesse contexto.

Para Greca e Moreira (2001) no ensino de ciências deve ser incorporada a ideia de modelagem, pois facilita a construção de modelos mentais pelos estudantes. Para entender a ciência é preciso se colocar no lugar dos cientistas que a fazem, logo, aprender as teorias

científicas implica aprender como se faz a ciência. Modelar é a principal atividade dos cientistas, é por meio da modelagem que a ciência é construída. Com efeito, trazer para a sala de aula atividades de modelagem pode contribuir para a aprendizagem da construção de modelos mentais mais apropriados e coerentes com os modelos conceituais.

Por outro lado, desenvolver atividades com modelagem científica, buscando a construção de modelos matemáticos não é algo simples e fácil de fazer, os mesmos autores apontam algumas características a se considerar no trabalho com a modelagem, a saber: os modelos mentais são pessoais, devendo-se buscar identificá-los a fim de auxiliar no melhoramento desses modelos; a modificação dos modelos iniciais não é tarefa fácil, pelo contrário, leva muito tempo; a modelagem deve ser valorizada, deve-se valorizar a construção do conhecimento por parte do aluno; entretanto, o estudo dos modelos mentais não pode ser abandonado, afinal, em geral, é ele quem fornece os primeiros elementos para a construção dos modelos mentais de cada indivíduo.

Modelagem Matemática

Desenvolver atividades com modelos matemáticos em sala de aula não é uma novidade, Bassanezi já realiza experiências no ensino brasileiro há algum tempo. Para esse pesquisador, a modelagem matemática é a arte de expressar situações-problema do nosso meio utilizando-se da linguagem matemática a fim de interpretar os fenômenos naturais e sociais (BASSANEZI, 2014).

Já Biembengut e Hein (2011) concebem a modelagem matemática como um processo pelo qual se obtém o modelo matemático, assim, que um modelo tende a ser mais sofisticado se maior for o conhecimento matemático de quem o elabora. Para Bassanezi (2014, p. 24) a “modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com

aproximações da realidade, ou seja, que estamos sempre elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele”.

O autor compreende que o modelo matemático é um “conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” (BASSANEZI, 2014, p. 20), e identifica quatro tipificações para os modelos matemáticos, são eles:

- Linear ou não linear, de acordo com as equações iniciais.
- Estático quando representa a forma do objeto ou Dinâmico quando simula variações dos estágios do fenômeno.
- Educacional se apresenta um número reduzido de suposições simples, utilizado principalmente para aquisição de experiência com a modelagem, ou Aplicativo se baseado em hipóteses realísticas, possuindo inter-relações de variáveis. É esse tipo de modelo sobre o qual o presente projeto se detém.
- Determinístico quando se assume que existem informações suficientes em um determinado momento e, com isso se admite poder prever o futuro do sistema precisamente. Ou Estocástico quando descrevem a dinâmica de um sistema em termos probabilísticos.

Ressalta ainda que a Modelagem Matemática consiste em “um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos” (BASSANEZI, 2014, p. 24). Entretanto, o autor alerta que é necessário sempre ter em mente que os modelos obtidos são aproximações da realidade, e só assim a modelagem se torna eficiente.

Para Bassanezi (2014, p. 18), a ciência contemporânea é, todavia, resultado de “experiências planejadas e auxiliadas por teorias sujeitas à evolução”. Isso quer dizer que a validade ou consistência de uma teoria muitas vezes depende diretamente da linguagem matemática que a envolve. O que se espera de um modelo matemático é que represente a realidade analisada.

O objetivo fundamental do “uso” de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância. (BASSANEZI, 2014, p. 18).

O mesmo autor afirma que outras ciências como a Física, a Astrofísica e a Química, já se encontram atualmente matematizadas de forma teórica. Por outro lado, o processo de matematização das Ciências Biológicas encontra-se em expansão, sendo utilizada para modelar a dinâmica de populações, a epidemiologia, a ecologia, a neurologia, a genética e os processos fisiológicos.

Bassanezi (2014) apresenta cinco passos para o desenvolvimento de atividades com modelagem matemática:

- 1 - *Experimentação*: objetiva a obtenção de dados, portanto, trata-se de uma atividade essencialmente laboratorial. Os métodos de experimentação em geral são definidos levando em conta a natureza do experimento e o objetivo da pesquisa.
- 2 - *Abstração*: processo que permite a formulação de Modelos Matemáticos. Essa fase é composta pela:
 - a. *Seleção de variáveis*: os conceitos e variáveis envolvidos no problema são definidos.
 - b. *Problematização*: formulação de problemas teóricos em uma linguagem própria e de acordo com a(s) área(s) envolvida(s).
 - c. *Formulação de hipóteses*: de modo geral, são formuladas hipóteses bem amplas que permitem deduzir manifestações empíricas específicas. A sua geração se dá de distintas formas, entre elas: observação dos fatos, comparação com outros

estudos, experiência pessoal do pesquisador, dedução lógica, analogia de sistemas.

d. *Simplificação*: busca-se a simplificação do processo de modelagem por meio da restrição do problema estudado que costuma ser complexo.

3 - *Resolução*: resolução do modelo, atividade própria do matemático que pode estar totalmente desvinculado da realidade representada. Em geral, refere-se à resolução de equações (de variações discretas ou diferenciais) advindas das hipóteses previamente determinadas.

4 - *Validação*: devem-se testar os modelos produzidos, confrontando-os com as hipóteses e os dados coletados no sistema real. Um modelo deve minimamente atender de forma satisfatória os dados iniciais, para ser considerado bom precisa facilitar as previsões ou sugerir aperfeiçoamentos do modelo.

5 - *Modificação*: o modelo pode ser aceito ou rejeitado de acordo com as condições iniciais, desse modo, nenhum modelo deve ser considerado definitivo ou imutável.

Essa visão da modelagem está relacionada a seu uso como método científico, ou seja, com seu uso na ciência da Matemática Aplicada moderna a qual “pode ser considerada como a arte de aplicar matemática a situações problemáticas, usando como processo comum a modelagem matemática” (BASSANEZI, 2014, p. 32). Vamos agora discorrer sobre o seu uso como ferramenta para o ensino da matemática.

Bassanezi (op. cit.) compreende a modelagem como uma ferramenta eficaz como estratégia de ensino e aprendizagem da matemática. Alguns autores como Biembengut e Hein (2011) e Bassanezi (2014) preferem utilizar a denominação Modelação Matemática ao se referir à Modelagem Matemática no ensino e aprendizagem.

No processo evolutivo da Educação Matemática, a inclusão de aspectos de aplicações e mais recentemente, resolução de problemas e modelagem, têm sido defendidas por várias pessoas envolvidas com o ensino da matemática. Isto significa, entre outras coisas, que a matéria deve ser ensinada de um modo significativo matematicamente, considerando as próprias realidades do sistema educacional. (BASSANEZI, 2014, p. 36).

Assim o autor faz alguns apontamentos que permitem a adoção da modelagem matemática como ferramenta no ensino e aprendizagem.

1 - *Argumento formativo*: à medida que enfatiza aplicações e a resolução de problemas contribui para desenvolver nos estudantes as capacidades de exploração e criação.

2 - *Argumento de competência ética*: a modelagem contribui para que na vida real os alunos tomem decisões, formando juízos próprios, por meio de aplicações com conceitos matemáticos.

3 - *Argumento de utilidade*: a modelagem possibilita ao aluno utilizar ferramentas matemáticas para resolver problemas em diferentes situações e áreas.

4 - *Argumento intrínseco*: a modelagem, resolução de problemas e aplicações possibilitam ao aluno compreender nuances e facetas da matemática.

5 - *Argumento da aprendizagem*: os processos aplicativos da matemática garantem uma melhor compreensão de seus conceitos.

6 - *Argumento de alternativa epistemológica*: a modelagem matemática relaciona-se com a perspectiva da Etnomatemática proposta pelo educador Ubiratan D'Ambrósio, à medida que representa uma alternativa metodológica mais adequada às distintas realidades socioculturais.

O autor ressalta ainda que há três tipos de obstáculos a serem superados no trabalho com modelagem: obstáculos instrucionais, obstáculos para os estudantes e obstáculos para os professores.

Obstáculos instrucionais: está relacionado à grade curricular que, de modo geral, os cursos apresentam, e que requerem estudo de conceitos específicos.

Obstáculos para os estudantes: não sendo uma metodologia costumeira para a maioria dos estudantes, as primeiras experiências nesse sentido podem representar obstáculos, desse modo, podem até torná-los apáticos para com essa metodologia, outro fator é que o tema trabalhado na modelagem pode não ser interessante para alguns estudantes da classe.

Obstáculos para os professores: muitos professores não se sentem preparados para trabalhar com a modelagem matemática, por falta de conhecimento do processo ou medo de se confrontarem com situações em que lhes possam faltar o conhecimento de como proceder. Além disso, possuem receio em “perder” muito tempo para preparar e desenvolver essas aulas e, assim, não cumprir o programa do curso.

É verdade que não se pode ignorar que as atividades investigativas proporcionadas pela modelagem matemática geram uma “zona de risco” aos professores (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013), mas acreditamos que sua potencialidade, um bom planejamento e engajamento sobre as propostas a serem aplicadas, com um bom reforço metodológico, proporcionam o aprendizado e minimizam o risco a cada nova tentativa.

Bassanezi (2014) enfatiza que ao considerar a modelagem uma estratégia de ensino e aprendizagem, o mais importante é a descoberta das relações e conceitos matemáticos envolvidas no processo, e não a descoberta do modelo em si. Também que na modelagem matemática que visa o ensino de matemática, a validação de um modelo pode não ser uma etapa obrigatória.

O autor aponta alguns procedimentos para a melhor forma de aprender a fazer modelagem

- aquisição de técnicas básicas e teoria (utilização do “dicionário” bilíngue: linguagem usual – matemática, matemática – linguagem usual);
- estudo de problemas clássicos;
- emprego de técnicas conhecidas em situações novas;
- questionamento ou crítica a respeito da falibilidade de modelos clássicos;
- improvisação de novas técnicas quando as existentes são inadequadas;
- abstração de princípios unificadores para certas situações;
- formulação de problemas em termos matemáticos;
- organização de material (dados experimentais, bibliográficos, etc.);
- cooperação com especialistas de outras áreas. (BASSANEZI, 2014, p. 45).

Cabe-nos agora definir a nossa visão do papel da modelagem científica na modelagem matemática. Podemos ver que existe entre as duas, alguns pontos de convergência, pois ambas buscam representações da realidade, a partir de modelos não únicos. Também buscam por um ensino alicerçado em bases construtivistas. A modelagem científica busca contribuir para uma visão mais próxima do real trabalho científico, e a modelagem matemática busca um aluno mais ativo em seu processo de aprendizagem e, além disso, construir conceitos matemáticos de forma dinâmica em um processo de cooperação entre o educador e o educando (KLÜBLER, 2010).

Desse modo, envolver as duas metodologias em um processo de construção do conhecimento é uma tentativa de construir um trabalho interdisciplinar (ou minimamente contextualizado), não apresentando a matemática como uma construção pronta e acabada em que cabe ao estudante apenas o papel de decorar regras e situações, não percebendo a construção dos modelos por detrás da teoria, pois “A modelagem matemática está sempre presente na construção de teorias científicas, em particular de teorias físicas. Em decorrência, a

modelagem matemática deveria também estar sempre presente no ensino de ciências, particularmente da Física” (MOREIRA, 2014, p. 10).

Moreira (op. cit.) faz críticas às práticas de ensino as quais os modelos são apresentados nos seus formatos finais, cabendo aos alunos aceitarem essas construções científicas como se fossem definitivas, e defende uma abordagem de forma conjunta, valorizando as relações existentes entre a matemática e as demais ciências. Assim busca-se uma relação entre os modelos científicos, matemáticos e mentais.

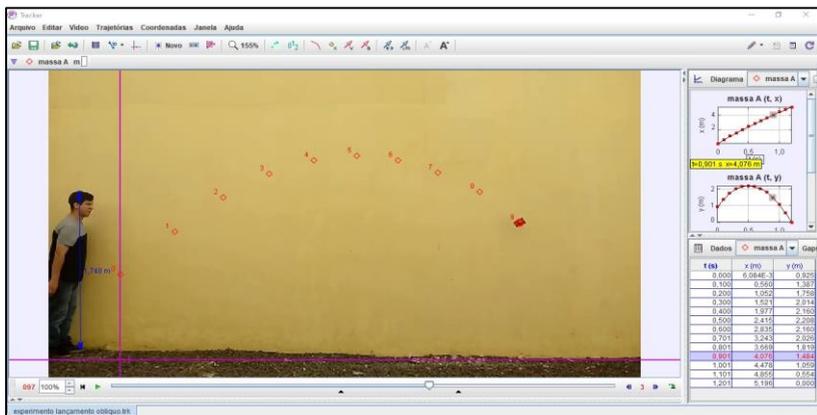
O Programa Tracker

O *Tracker* é uma ferramenta gratuita de análise de vídeos, projetada para uso no ensino de Física (BROWN, 2020). O *software* é ligado ao projeto *Open Source Physics*. Com ele podemos utilizar vídeos, tendo suporte de ferramentas e análise gráfica, o programa nos apresenta alguns recursos, tais como: rastreamento da posição de um objeto em sua trajetória, gráficos e dados de velocidade e aceleração de corpos em movimento, divisão do vídeo por quadros por segundo, calibração de medidas, entre outros.

O uso mais básico do programa se dá a partir da captura e acesso a um vídeo digital. É possível calibrar dimensões e, assim, analisar o movimento do objeto, incluindo os respectivos vetores. O aplicativo faz a identificação automática da quantidade de quadros por segundo utilizada na gravação do vídeo original. A partir dessa análise, o programa gera gráficos de diferentes grandezas físicas a partir do ajuste de curvas (como posição, velocidade, aceleração, energia, entre outros), com a possibilidade das respectivas tabelas com os dados gerados. É possível a visualização simultânea do vídeo original com o rastreamento do objeto/corpo físico realizado com o programa (Figura 1).

Uma limitação do *Tracker* está relacionada à sua resolução temporal. Como essa depende da resolução da câmera no qual o vídeo foi gravado, em casos de filmes com poucos quadros por segundo em que a velocidade do objeto em movimento é alta, as imagens podem aparecer borradas, dificultando a obtenção de valores de posição em função do tempo.

Figura 1 - Interface do *Tracker*



Fonte: Autores (2019)

Brown (2020) destaca os recursos disponíveis quanto ao rastreamento de objetos, modelagem, vídeo, geração e análise de dados, conforme quadro abaixo:

Quadro 1 - Recursos disponibilizados pelo programa *Tracker*

Rastreamento	<ul style="list-style-type: none"> • Rastreamento manual e automatizado de objetos com dados de posição, velocidade e aceleração; • Centro de massa; • Vetores gráficos interativos e somas vetoriais; • Perfis de linha RGB em qualquer ângulo, regiões RGB dependentes do tempo.
Modelagem	<ul style="list-style-type: none"> • Criação de modelos cinemáticos e dinâmicos de partículas de massa pontual e sistemas de dois corpos; • Animação de modelos externos (programas de modelagem separados) que sobrepõem dados multipontos, como planilhas e simuladores em Java; • As sobreposições do modelo são sincronizadas e dimensionadas automaticamente para o vídeo a partir da comparação visual direta com o mundo real.
Vídeo	<ul style="list-style-type: none"> • Reprodução e gravação da maioria dos formatos de vídeo (mov / avi / flv / mp4 / wmv etc.) no Windows / OSX / Linux; • Filtros de vídeo, incluindo brilho/contraste, de perspectiva e distorção radial, dentre outros; • Exportação de vídeo que permite editar e codificar vídeos, com ou sem sobreposição de gráficos, usando o próprio <i>Tracker</i>; • Caixa de diálogo com propriedades do vídeo mostra dimensões, caminho, taxa de quadros, contagem de quadros, dentre outros.

<p>Geração e Análise de Dados</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Escala, origem e inclinação do sistema de coordenadas fixo ou variável no tempo; • Múltiplas opções de calibração: fita, bastão, pontos de calibração e/ou origem do deslocamento; • Alterne facilmente para o centro de massa e outros quadros de referência; • Os dados incluem unidades (unidades métricas do SI por padrão, comprimento e massa configuráveis); • Transferidores e fitas métricas proporcionam medições fáceis de distância e ângulo; • Ferramenta que ajusta os círculos a 3 ou mais pontos, etapas ou trajetórias; • Definição de variáveis personalizadas para plotagem e análise de dados; • Adição de textos editáveis para comentários ou dados inseridos manualmente; • Ferramenta de análise de dados que inclui um poderoso ajuste automático e manual de curvas; • Exportação de dados formatados ou brutos para um arquivo de texto delimitado ou para a área de transferência; • Exibição de valores medidos usando formatos de número personalizados, se assim desejar.
-----------------------------------	--

Fonte: Adaptado de Brown (2020)

Com essa gama de ferramentas, gratuidade na instalação e utilização, o programa torna-se um excelente aliado na construção e estudo de modelos físicos. Para a execução das propostas, é de fundamental importância o uso de um laboratório de informática,

como um ambiente colaborativo que permita o trabalho de pequenos grupos, e com suporte de mediadores para a discussão tanto dos modelos físicos, matemáticos, do programa computacional, quanto das perspectivas metodológicas de ensino envolvidas no processo, dependendo do público-alvo envolvido.

O Percorso Metodológico

Na busca por construir uma proposta que fosse capaz de fazer nosso acadêmico compreender os passos para a construção de modelos, assim como investigar seus resultados e o entendimento de como chegar a um modelo já aceito cientificamente, buscamos unir em uma atividade de laboratório o ensino a partir da observação dos fenômenos representados pela Modelagem Científica e da construção de modelos matemáticos usando os recursos da Modelagem Matemática.

A primeira tentativa de realizar essa atividade foi durante um minicurso para alunos da licenciatura em Matemática da UNIPAMPA - Câmpus Itaqui. O minicurso ocorreu durante a Semana Acadêmica do curso de Matemática no primeiro semestre de 2019. Oportunamente, no mesmo semestre, também o aplicamos na Semana Acadêmica dos cursos de Matemática e Física - Licenciaturas do IFFar no município de São Borja.

Nossos estudos buscam fazer com que o aluno seja o principal ator na construção de sua aprendizagem, para tal temos trabalhado com diferentes estratégias. Apresentaremos neste estudo uma proposta de Modelagem Científica que objetiva colocar o estudante no centro do processo de ensino-aprendizagem, responsabilizando-se por sua aprendizagem de forma ativa e reflexiva.

Este trabalho busca discutir uma sequência didática desenvolvida em formato de oficina. Partimos assim, de uma metodologia qualitativa, caracterizada como um estudo de caso, em

que fizemos uso da observação participante e análise dos materiais recolhidos para análise dos resultados.

As oficinas foram elaboradas em três momentos distintos, mantendo os passos sugeridos por Bassanezi (2014): Experimentação, Abstração, Resolução e Validação. Os acadêmicos foram divididos em 04 grupos, e cada grupo teve a mediação de um professor ou um estudante já mais experiente, pertencente ao PIBID do curso de Matemática.

Primeiro Momento:

Apresentamos o programa *Tracker* com a exploração de suas ferramentas. Para isso, mostramos um vídeo e organizamos uma atividade orientadora, na qual discutimos as potencialidades das ferramentas oferecidas, com algumas variações e análises gráficas possíveis.

Disponibilizamos apostila com instruções do programa e realizamos uma breve retomada e discussão acerca dos fenômenos físicos de movimento sugeridos para a atividade prática nos momentos posteriores.

Segundo Momento:

Solicitamos aos participantes que se dividissem em grupos de até 05 componentes e que cada grupo escolhesse um dos fenômenos físicos: lançamento oblíquo, movimento de queda livre, deslocamento da gota de água em um recipiente com óleo e movimento retilíneo uniforme a partir do deslocamento de um objeto em uma superfície inclinada. Escolhido o fenômeno, era hora de representá-lo através de um objeto, e para isso disponibilizamos bolas pequenas de borracha como objeto a ser lançado, vidro com óleo e conta-gotas, cabos de madeira que formam uma canaleta para uma superfície inclinada, além de cabos para uso de dados dos celulares no computador. Foi solicitado que cada grupo construísse um modelo matemático

representativo do fenômeno observado, e para tal, que o fenômeno fosse gravado com auxílio de seus celulares e observado a partir do uso do programa *Tracker*.

Terceiro Momento:

A análise dos fenômenos observados se deu a partir de alguns questionamentos por parte dos mediadores em cada grupo. Alguns dos questionamentos foram:

- a) Qual a altura máxima atingida pelo objeto ou qual o maior trajeto percorrido por ele?
- b) Em que momento ocorreu a altura máxima?
- c) Quanto tempo levou para realizar o percurso completo?
- d) Qual a velocidade inicial do objeto?
- e) Quais as funções que descrevem essa trajetória? Considere $x(t)$, $y(t)$ e $y(x)$.
- f) Qual a função que descreve a velocidade?
- g) Qual o modelo que melhor representaria este fenômeno?

Resultados e Discussões

Apresentaremos neste ensaio, os resultados das atividades desenvolvidas pelo grupo que trabalhou com lançamento oblíquo. Escolhemos analisar aqui esta proposta por se tratar do grupo que melhor conseguiu finalizar a proposta, pois o tempo decorrido pela atividade proposta não oportunizou aos demais grupos cumprirem todas as etapas. Buscaremos apresentar o desenvolvimento da proposta pelo grupo, passando pelas etapas de construção de modelos apresentadas por Bassanezi (2014).

Experimentação: primeiramente os acadêmicos realizaram a filmagem do movimento com uso do celular, representando o objeto lançado. Após, passaram o vídeo para o computador onde fariam a análise do movimento com auxílio do programa *Tracker*. Seguiram então para a realização dos ajustes, conforme identificado na Figura 2:

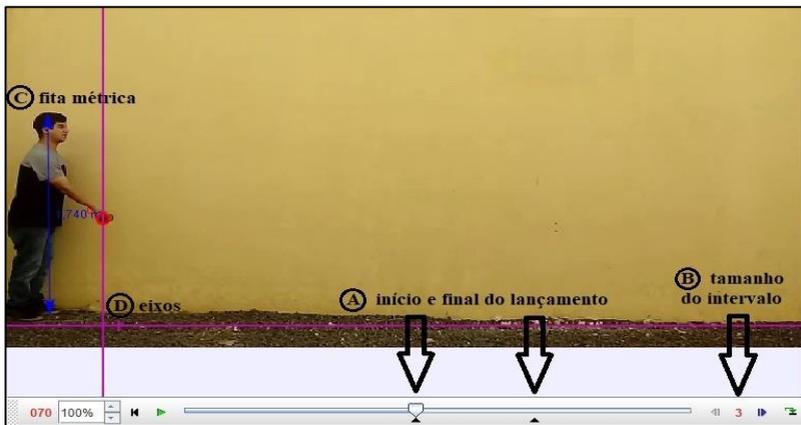
(A) corte do vídeo - para conter apenas as partes a serem estudadas do fenômeno (o início do lançamento até a chegada do objeto ao solo);

(B) tamanho do intervalo - definição da quantidade de quadros necessários para análise do fenômeno;

(C) calibração da escala espacial - comparação entre uma distância conhecida pelos pesquisadores (altura do estudante) e a escala de deslocamento do objeto lançado;

(D) eixos de coordenadas x e y - permite uma análise do objeto em movimento em duas dimensões.

Figura 2 - Vídeo do lançamento oblíquo de um objeto: definições iniciais



Fonte: Autores (2019)

Posteriormente, marcaram-se os pontos de interesse do objeto a cada quadro de análise do vídeo, conforme pode ser visualizado na Figura 3.

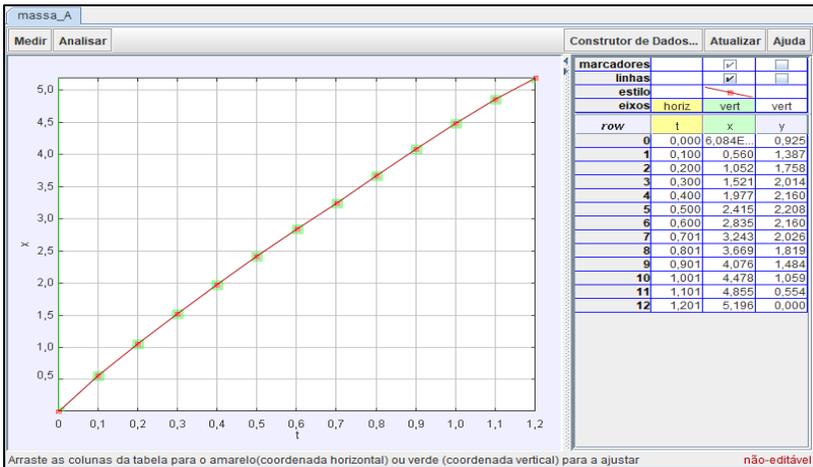
Figura 3 - Vídeo do lançamento oblíquo de um objeto: marcação do objeto



Fonte: Autores (2019)

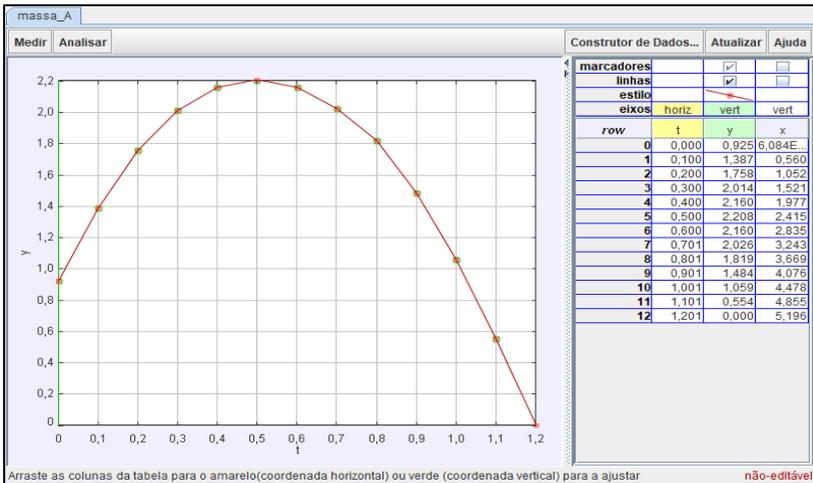
Abstração: utilizando uma janela de dados, podem ser selecionadas as variáveis e os gráficos de interesse. Para o caso específico, foram utilizados os gráficos apresentados nas Figuras 4, 5 e 6.

Figura 4 - Dados gráficos do Tracker: x em função de t



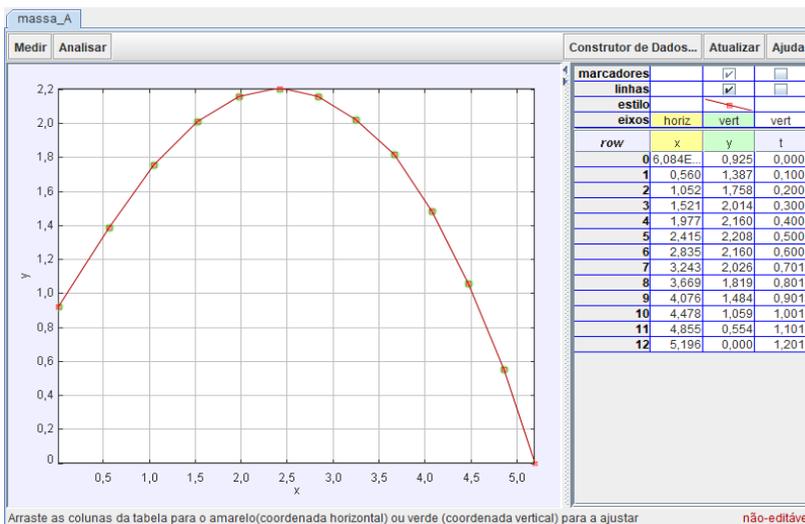
Fonte: Autores (2019)

Figura 5 - Dados gráficos do Tracker: y em função de t



Fonte: Autores (2019)

Figura 6 - Dados gráficos do *Tracker*: y em função de x



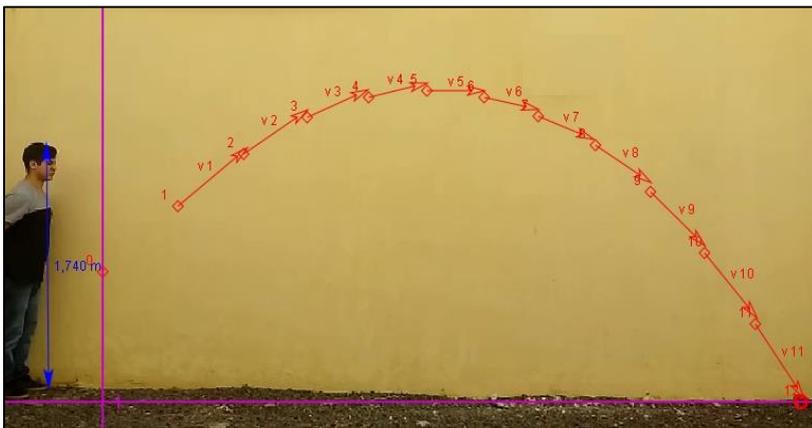
Fonte: Autores (2019)

Resolução: de posse das informações obtidas com a manipulação gráfica no programa os estudantes buscaram encontrar as soluções para as questões propostas. Observando os gráficos das Figuras 5 e 6, encontraram a altura máxima como sendo $y = 2,208m$. Também fazendo a leitura do mesmo, analisaram a máxima altura na tabela dos dados (e em conformidade com as Figuras 5 e 6) e identificaram que ocorreu em $t = 0,5s$. O último dado considerado, quando o objeto atingiu o chão, foi depois de aproximadamente $t = 1,2s$ do lançamento.

Para analisar a velocidade inicial do objeto, os estudantes tiveram que ter um cuidado maior. O programa apresenta vetores representando a velocidade, assim como uma tabela de dados, conforme Figura 7. Dessa forma, como pode ser percebido, não há um dado de velocidade inicial, portanto intervimos para os alunos a buscarem, além de interpretarem os dados apresentados.

Na tentativa de interpretar os dados, o grupo observou que o *Tracker* informa a inclinação quando selecionados pontos no gráfico. De posse desses dados chegaram à conclusão de que a velocidade na direção x é dada por $v = 5,23m/s$ para $t = 0,1s$ e $x = 0,5m$, conforme apresentado na Figura 8 (abaixo da figura destacada em amarelo).

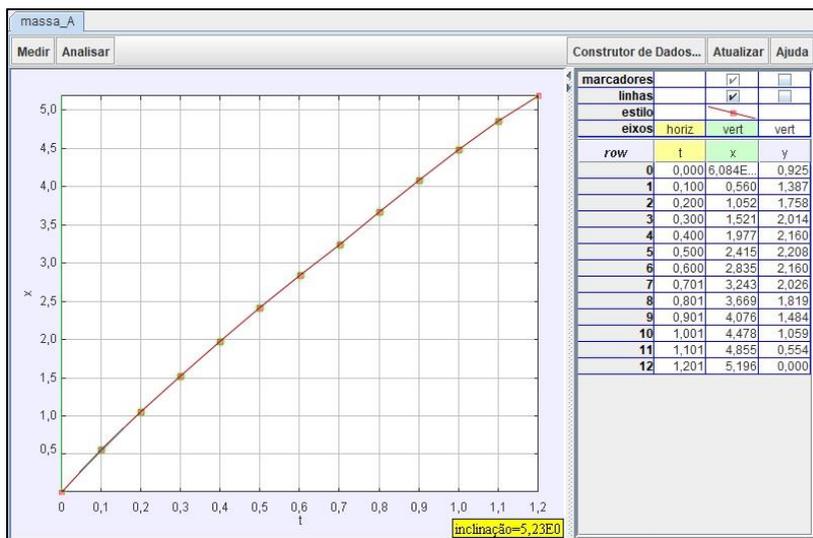
Figura 7 - Tela do *Tracker*: vetores de velocidade



Fonte: Autores (2019)

Na sequência, a fim de compreender o dado apresentado, optou-se pelo cálculo da velocidade média no intervalo $t = 0s$ a $t = 0,2s$, usando para tal a equação de $v_m = (s_2 - s_1)/(t_2 - t_1)$, obtendo a confirmação do valor $v_x = 5,23m/s$.

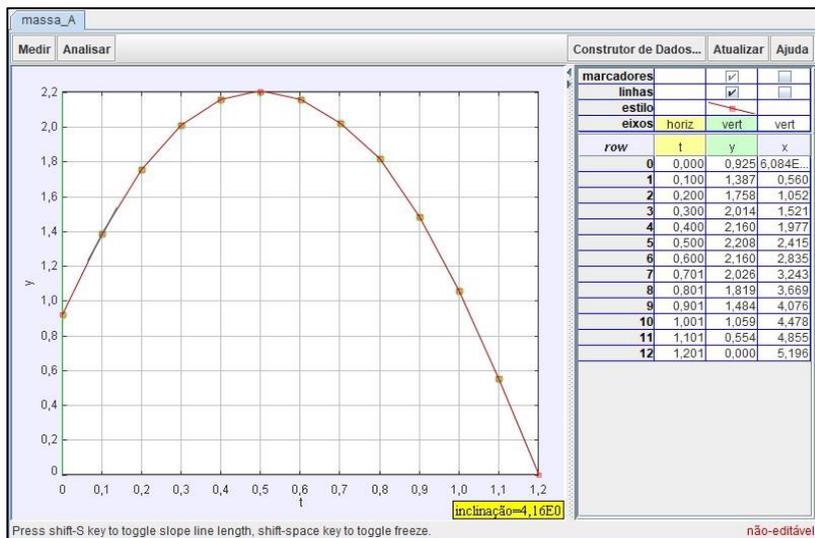
Surge então um obstáculo, pois para $t = 0s$ há uma dificuldade de calcular a velocidade. A solução do problema foi calcular a velocidade média no intervalo de $t = 0s$ a $t = 0,1s$, obtendo-se $v_x = 5,54m/s$. Após discussões com os professores, concluíram que essa seria a velocidade mais próxima que poderiam obter com os recursos que tinham, então essa última velocidade foi considerada a velocidade inicial do objeto na direção x .

Figura 8 - Análise da velocidade inicial: x em função de t 

Fonte: Autores (2019)

Já na direção y , a velocidade no programa é dada por $v = 4,16m/s$ para $t = 0,1s$ e $y = 1,387m$, conforme apresentado na Figura 9 (abaixo da figura destacado em amarelo). Foi então considerando mais pertinente calcular a velocidade média no primeiro intervalo de $t = 0s$ a $t = 0,1s$, obtendo-se $v_y = 4,59m/s$.

Figura 9 - Análise da velocidade inicial: y em função de t



Fonte: Autores (2019)

De posse das duas componentes aproximadas v_x e v_y , iniciaram o cálculo da velocidade inicial através da equação $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, o que resultou em $v = 7,19m/s$. Por fim, a primeira velocidade apresentada pelo programa pode ser confrontada com o cálculo da velocidade média considerando-se o intervalo $t = 0s$ a $t = 0,2s$, confirmando-se a investigação.

Para chegarem a esses valores foi necessária a intervenção do professor que ajudou na mediação da proposta, lembrando alguns conceitos já esquecidos e propondo análise mais apurada dos dados, não costumeira como os estudantes, de modo geral, encontram nos livros didáticos.

A descrição das funções pelos estudantes não foi realizada usando ajustes de curvas ou construindo modelos por aproximações a partir

dos valores observados nos gráficos do programa. Neste caso, como o tempo era restrito, buscamos auxílio no próprio programa computacional para realizar essa atividade, já que o objetivo não era a construção modular do fenômeno, e sim a compreensão matemática de como esse modelo é proposto a partir da análise do fenômeno.

Para tal compreensão, fizemos os acadêmicos observarem que o *Tracker* contém ajustes de curvas, com as seguintes possibilidades: cúbico, exponencial, gaussiano, linear, parabólico, senoide. Realizando os ajustes com parábolas, obteve-se

$$x(t) = -0,6299t^2 + 5,049t + 0,04372 \quad \text{com } dE = 0,01842$$

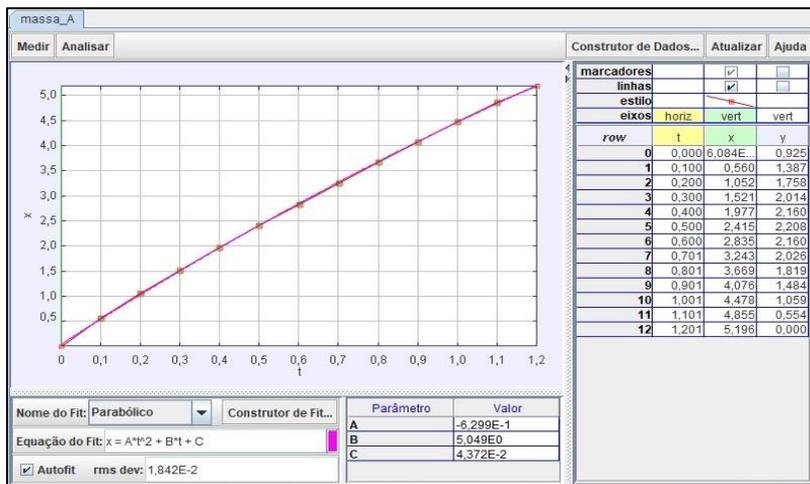
$$y(t) = -4,75t^2 + 4,883t + 0,9509 \quad \text{com } dE = 0,01851$$

$$y(x) = -0,2592x^2 + 1,203x + 0,8296 \quad \text{com } dE = 0,04919$$

onde dE representa o desvio padrão da Raiz do Erro Quadrático Médio. As equações e os dados podem ser visualizados nas Figuras 10, 11 e 12 (dE está representado por *rms dev* no canto inferior esquerdo).

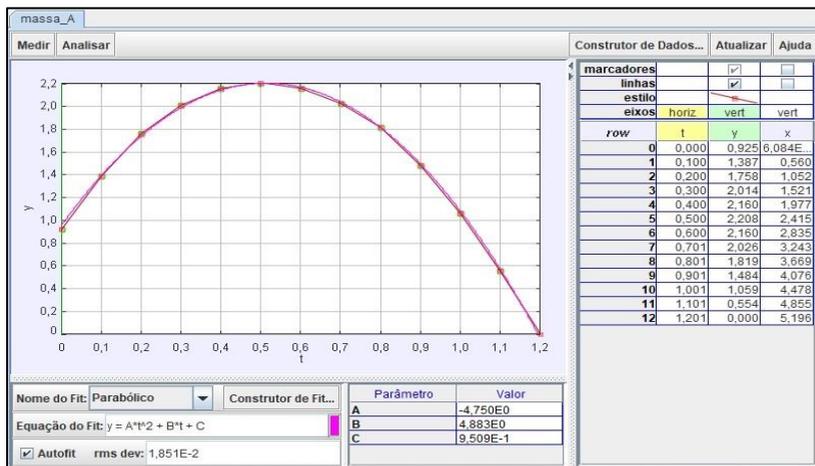
Validação: como o programa *Tracker* já realizava os ajustes e apresentava os erros durante a resolução dos problemas, os alunos puderam discutir e avaliar os melhores modelos (mais ajustados ou com menor erro). Neste processo, puderam experimentar diferentes ajustes, como, por exemplo, linear ou senoide, para então chegar ao parabólico, utilizado nas três equações encontradas.

Figura 10 - Ajuste da curva $x(t)$

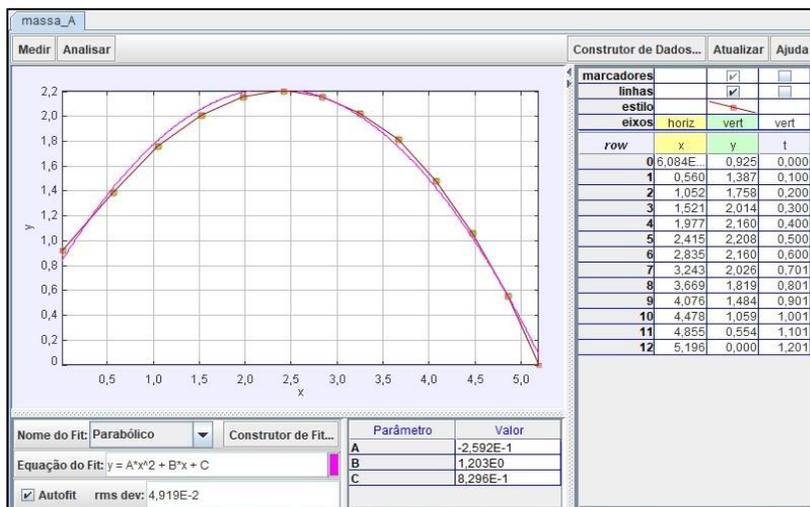


Fonte: Autores (2019)

Figura 11 - Ajuste da curva $y(t)$



Fonte: Autores (2019)

Figura 12 - Ajuste da curva $y(x)$ 

Fonte: Autores (2019)

Destaca-se aqui, que a função $x(t)$ não obteve como melhor ajuste uma reta, como seria de se esperar teoricamente. Entendemos que uma próxima etapa, a de *Modificação*, tem espaço para discussão e modificação do modelo, tratando sobre a teoria e novas variáveis (a resistência do ar, por exemplo).

Considerações Finais

Inicialmente queremos esclarecer que no nosso curso, estamos dando os primeiros passos na busca de métodos de ensino que cumpram o protagonismo desejado no processo de ensinar e aprender. Desejamos criar atividades que explorem formas diferentes de se ensinar velhos conteúdos, de modo que sejam minimamente contextualizados e relacionados com outras áreas do conhecimento.

Essa experiência nos trouxe uma forma diferente de abordar os mesmos conteúdos, porém, com a vantagem de ser o estudante o protagonista no processo de construção do seu conhecimento e o professor o mediador dessa aprendizagem. Outro fator a ser considerado é que podemos abordar diferentes conceitos em uma única atividade.

Foi possível perceber no desenvolvimento da proposta, que os estudantes, embora sentindo dificuldades durante a realização do processo, pois por costume gostam de encontrar respostas prontas para suas perguntas, sentiram-se motivados a buscar tais soluções por conta própria. Do mesmo modo que é possível explorar em uma única atividade diferentes conceitos científicos, também é o explorar de diferentes habilidades e competências em nossos estudantes, na medida em que devem manipular objetos, compreender fenômenos de outra áreas do conhecimento, relacionar conceitos, interpretar situações e dados, usar recursos tecnológicos, entre outros.

Por outro lado, temos várias considerações a fazer, para melhorar as propostas que estão por vir. Percebemos que um bom planejamento é fundamental para o desenvolvimento de uma proposta ativa, que os professores necessitam tempo para tal, assim como para sua aplicação. Percebemos também, que um trabalho em conjunto com outros professores e de diferentes áreas do conhecimento, que venham a se inserir na proposta, torna-a mais interdisciplinar. Ainda, dois ou mais professores trabalhando ao mesmo tempo, faz com que os estudantes tenham um olhar diferenciado para a atividade, buscando relacionar as diferentes áreas do conhecimento, que, de modo geral, encontram-se isoladas no curso de graduação.

Procuramos nas próximas propostas desenvolver novas atividades, relacionando diferentes áreas do conhecimento, na busca pela construção de modelos matemáticos a fim de compreenderem a construção dos modelos científicos adotados pela ciência e revelados pela escola como algo pronto e acabado.

Nossa próxima atividade será uma experiência aplicada na componente de Laboratório de Ensino de Matemática III, em que iremos propor uma disciplina de modelagem científica a ser desenvolvida de forma interdisciplinar, com mais de um professor do curso envolvido na componente curricular.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2013.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. *In: Reunião Anual da ANPED*, 24, 2001, Caxambu/MG. Anais da 24ª ANPED. Rio de Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2. ed., 2011.

BROWN, D. **Tracker**: Video Analysis and Modeling Tool. Programa Tracker 5.1.4 [homepage na Internet], 2020. Disponível em: <https://physlets.org/tracker/>. Acesso em: 10 maio 2020.

GILBERT, J. K.; BOULTER, C. J. Aprendendo ciências através de modelos e modelagem. *In: COLINVAUX, D. (Org.) Modelos e Educação em Ciências*. Rio de Janeiro: Ravil, 1998.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. Mental, physical, and mathematical models in the teaching and learning of physics. **Science and Education**, v. 86 n. 1, p. 106-121, 2001.

KLÜBER, T. E. Modelagem matemática: revisitando aspectos que justificam a sua utilização no ensino. *In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Org.) Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica*. Ponta Grossa: Editora UEPG, cap.5, p. 97-114, 2010.

MOREIRA, M. A. Modelos científicos, modelos mentais, modelagem computacional e modelagem matemática: aspectos epistemológicos e implicações para o ensino. *In: Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 7, n. 2, maio-ago, 2014. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/132559/000983274.pdf?sequence=1>. Acesso em: 17 mar. 2020.

MOREIRA, M. A.; OSTERMANN, F. Sobre o ensino do método científico. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v.10, n. 2, p. 108-117, 1993.

POZO, J. I.; CRESPO, M. A. G. **A aprendizagem e o ensino de ciências**: do conhecimento cotidiano ao conhecimento científico. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

SILVA E DORNELES. **Uso da modelagem científica como recurso instrucional para o desenvolvimento de atividades experimentais no ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências). Universidade Federal do Pampa, 2017. Disponível em: <http://dspace.unipampa.edu.br:8080/jspui/handle/rii/2995>. Acesso em: 15 maio 2020.

TOULMIN, S. **La comprensión humana**. I El uso colectivo y evolución de los conceptos. Madrid: Alianza Editorial, 1977.

Comparação entre as Soluções Analítica e Numérica de um Modelo Matemático de Cinética Química

*Clemerson Alberi Pedroso*¹
*Jaqueline Willian Scotton*²

Introdução

Estudos que abrangem modelagens e simulações – analíticas ou numéricas – de problemas que envolvem reações químicas são vastos na literatura. Nesse sentido, podem ser citados os trabalhos de Okino e Mavrouniotis (1998); Schaich, Becker e King (2001); Gorskii e Zeinalov (2003); Levanov, Antipenko e Lunin (2010); Székely *et al.* (2012); Dehimi *et al.* (2014), dentre outros.

Cada reação pode ocorrer numa determinada velocidade, levando certo tempo para se concluir. Algumas são muito rápidas, ocorrendo em frações de segundo, como a combustão de TNT (trinitrotolueno), enquanto outras são muito lentas, demorando até

¹ Mestre em Matemática Aplicada pela UFRGS, Licenciado em Ciências Habilitação em Matemática pela UNIJUÍ. Docente da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões - URI Erechim. *E-mail:* clemersonpedroso@gmail.com.

² Mestre em Modelagem Computacional pela FURG, Licenciado em Matemática pela Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões - URI Erechim. Especialista de Ensino pelo SENAI Blumenau. *E-mail:* jaquewillian@gmail.com.

mesmo séculos para se completarem, como a formação de petróleo e a degradação natural de lixo. Há ainda aquelas que são moderadas, levando minutos, horas, ou dias, como a decomposição térmica de sais e a deterioração de alimentos por ação de bactérias (FONSECA, 1992).

Devido a essas diferenças de velocidade entre as reações, surgiu a necessidade de controlar a ocorrência delas para poder usufruir de seus possíveis benefícios e até mesmo, em alguns casos, evitar seus danos. Uma consequência disso foi o desenvolvimento da cinética química, ramo da físico-química que estuda, entre outras coisas, a velocidade das reações químicas. A cinética fornece modelos matemáticos capazes de descrever a velocidade das reações químicas, relacionando as variações de produto ou de reagente em intervalos de tempo.

Feltre (2004) define a cinética química como o estudo não somente da velocidade com que as reações ocorrem, mas também dos fatores que influenciam nessa velocidade, destacando que esse estudo tem, inclusive, uma importância financeira, uma vez que, no caso das indústrias químicas, por exemplo, acelerando-se as reações, reduzem-se os gastos e, conseqüentemente, aumentam-se os lucros. Não obstante, lembra ainda que um dos objetivos da química é o de controlar a velocidade das reações químicas, otimizando suas utilizações ao fazê-las rápidas o suficiente para que forneçam o maior aproveitamento possível, mas não tão rápidas a ponto de tornarem-se perigosas.

Neste âmbito, no presente capítulo é apresentada uma atividade prática envolvendo modelagem matemática, em que se desenvolve a indução em laboratório de uma reação química com catálise enzimática – oxidação de catecol catalisada pela enzima polifenoloxidase, extraída da batata –, desenvolvida com o intuito de registrar a absorbância em intervalos de tempo, e as respectivas soluções analítica e numérica de um modelo matemático que descreve a velocidade deste tipo de reação, comparando os resultados obtidos pelos diferentes métodos. O referido trabalho foi desenvolvido no

curso de graduação de Licenciatura em Matemática da URI Erechim e apresentado como Trabalho de Conclusão do Curso (TCC) em 2013.

Ordem de uma reação química

Uma reação é dita de primeira ordem quando, por exemplo, ao se considerar a reação



tem-se que a velocidade é diretamente proporcional à concentração do reagente A elevada à primeira potência, isto é,

$$v = \frac{d[A]}{dt} = -k[A] \quad (2)$$

onde v é a velocidade da reação, $[A]$ é a concentração do reagente, t é o tempo e k é uma constante. Integrando a Equação 2,

$$\int_{[A_0]}^{[A]} \frac{d[A]}{[A]} = -k \int_0^t dt \quad (3)$$

onde $[A_0]$ é a concentração inicial, obtém-se uma função explícita entre a concentração e o tempo:

$$[A] = [A_0]e^{-kt} \quad (4)$$

A Equação 4 mostra que a concentração do reagente decresce exponencialmente em função do tempo durante a reação.

Ao se considerar uma reação como a exemplificada na Equação 1, onde há um único reagente, tem-se que, se ela for de segunda ordem, então sua lei de velocidade será

$$v = \frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2 \quad (5)$$

Integrando-a,

$$\int_{[A_0]}^{[A]} \frac{d[A]}{[A]^2} = -k \int_0^t dt \quad (6)$$

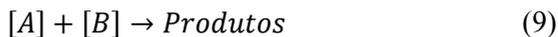
a equação torna-se

$$\frac{1}{[A]} - \frac{1}{[A_0]} = kt \quad (7)$$

ou

$$[A] = \frac{[A_0]}{[A_0]kt + 1} \quad (8)$$

Entretanto, se a reação tiver dois reagentes, cada qual com ordem 1, a equação pode ser escrita como



então ela será de ordem global 2 e terá, como lei de velocidade,

$$v = \frac{d[A]}{dt} = -k[A][B] \quad (10)$$

Nesse caso, Atkins (1997) destaca que a Equação 10 só pode ser integrada caso se conheça a relação entre as concentrações de $[A]$ e $[B]$ e emenda que, nesse tipo de reação, se $[A]$ decresce, $[B]$ decresce na mesma proporção, isto é, $[A_0] - x \Rightarrow [B_0] - x$.

Desse modo, a Equação 10 torna-se

$$\frac{d[A]}{dt} = -k([A_0] - x)([B_0] - x) \quad (11)$$

e como $d[A]/dt = -dx/dt$, então

$$\frac{dx}{dt} = k([A_0] - x)([B_0] - x) \quad (12)$$

que pode ser integrada

$$\int_0^x \frac{dx}{([A_0] - x)([B_0] - x)} = k \int_0^t dt \quad (13)$$

tornando-se

$$kt = \frac{1}{[B_0] - [A_0]} \ln \left(\frac{[A_0]([B_0] - x)}{[B_0]([A_0] - x)} \right) \quad (14)$$

ou

$$kt = \frac{1}{[B_0] - [A_0]} \ln \left(\frac{[A_0][B]}{[B_0][A]} \right) \quad (15)$$

que é obtida considerando

$$[A_0] - x = [A] \quad e \quad [B_0] - x = [B] \quad (16)$$

É interessante observar que a Equação 7 equivale à reta

$$y = ax + b \quad (17)$$

em que

$$y = 1/[A], \quad ax = kt \quad e \quad b = 1/[A_0] \quad (18)$$

O inverso da concentração de um reagente em uma reação de segunda ordem é, então, em função do tempo, uma reta com coeficiente angular k , o que possibilita determinar seu valor graficamente.

Se, por outro lado, a reação dada pela Equação 1 for de ordem zero, então o modelo do processo cinético desta reação será

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = k[A]^0 = k \quad (19)$$

Integrando-a

$$-\int_{[A_0]}^{[A]} d[A] = k \int_0^t dt \quad (20)$$

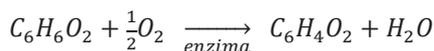
a equação torna-se

$$[A_0] - [A] = kt \quad (21)$$

Neste caso, a própria concentração $[A]$ em função de t fornece uma reta com coeficiente angular k .

Experimentação em Laboratório

A reação química induzida experimentalmente foi a oxidação de catecol catalisada pela enzima polifenoloxidase, extraída da batata.



A referida enzima, que pertence ao grupo das oxirredutases, catalisa a remoção de hidrogênio do catecol, formando água e a quinona correspondente. Os materiais utilizados na experiência foram:

- Solução de catecol 0,005 M;
- Extrato de batata;
- Água oxigenada 10% em volume;
- Espectrofotômetro UV-Visível;
- Funil;
- Papel-filtro;
- Conta-gotas;
- Pipetas de 1 ml, 2 ml e 3 ml;
- Gral (Almofariz);
- Pistilo;
- Cronômetro.

Já o procedimento deu-se da seguinte forma: inicialmente, amassou-se meia batata dentro de um gral, com o auxílio de um pistilo; depois filtrou-se o extrato da batata (aproximadamente 1 ml), depositando-o num béquer pequeno; a seguir, ligou-se o termostato,

ajustando-o na temperatura desejada (25°C); feito isso, ligou-se o espectrofotômetro e acertou-se zero absorvância no comprimento de onda de 458 nm; na seqüência, depositou-se numa cubeta 0,5 ml de catecol, 2,5 ml de água e uma gota de água oxigenada 10% em volume, e a cubeta no suporte da amostra no aparelho, deixando-o termostatar por 3 minutos, acertando zero absorvância; então, retirou-se a cubeta do aparelho e adicionaram-se duas gotas de extrato de batata; agitou-se a solução e, novamente, a cubeta foi colocada no aparelho; assim, fez-se a primeira leitura, disparando imediatamente o cronômetro.

A partir de então foram feitas leituras de 20 em 20 segundos durante 10 minutos e repetiu-se o procedimento para as seguintes concentrações de reagente:

- 0,75 ml de catecol, com 2,25 ml de água (Experimento 2);
- 1 ml de catecol, com 2 ml de água (Experimento 3);
- 1,5 ml de catecol, com 1,5 ml de água (Experimento 4).

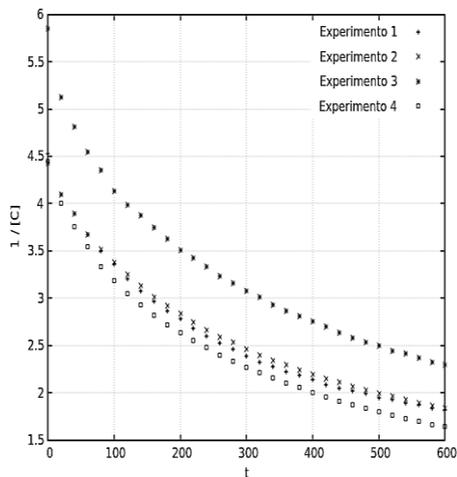
Desse modo, foram realizados quatro experimentos variando-se as concentrações de reagente. Isso porque para determinar a ordem da reação é preciso considerar a relação entre a concentração de reagente e o tempo.

Análise do Experimento e Escolha do Modelo Matemático

A ordem de uma reação química pode ser determinada graficamente. Em uma reação de primeira ordem, conforme Atkins (1997), distribuindo-se em um gráfico os valores de $\ln [C]/[C_0]$ em função de t , onde $[C]$ é a concentração em cada instante de tempo, t , e $[C_0]$ é a concentração inicial; o resultado é a obtenção de uma reta, ou seja, tem-se uma relação linear entre as variáveis. Já em reações químicas de segunda ordem e de ordem zero, conforme Kotz e Treichel (2002), as relações lineares se dão, no primeiro caso, entre o inverso da concentração $1/[C]$ e o tempo e, no segundo, entre a própria

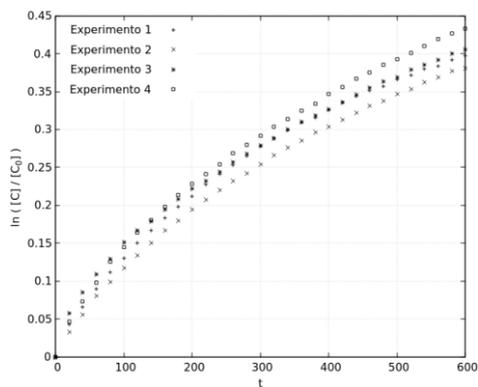
concentração $[C]$ e o tempo. Estas relações estão mostradas nas Figuras 1, 2 e 3.

Figura 1 - Verificação gráfica da relação entre $1/[C]$ e t

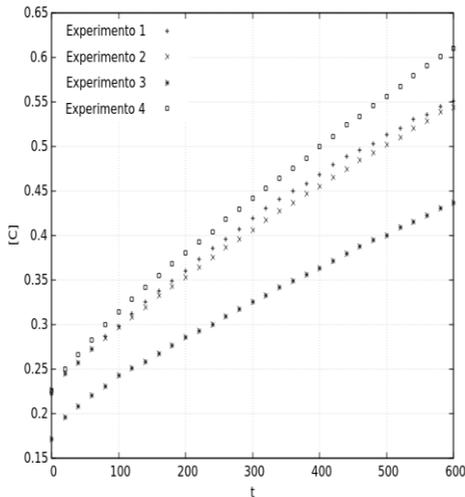


Fonte: os autores

Figura 2 - Verificação gráfica da relação entre $\ln [C] / [C_0]$ e t



Fonte: os autores

Figura 3 - Verificação gráfica da relação entre $[C]$ e t 

Fonte: os autores

Pode-se observar, na Figura 1 e na Figura 2, que a reação não deve ser de primeira nem de segunda ordem, uma vez que as variáveis claramente não apresentam relações lineares. Na Figura 3, por sua vez, pode-se verificar uma tendência à linearidade entre as variáveis, o que indica que a reação deve ser de ordem zero. Entretanto, para verificar esse fato com maior clareza pode-se comparar os valores de $[C]$, de $\ln [C]/[C_0]$ e de $1/[C]$, registrados experimentalmente, com os obtidos por meio de regressões lineares. Essas comparações estão apresentadas nas Tabelas 1, 2 e 3. Em todos os casos, a Diferença Absoluta Normalizada (DAN) foi calculada por

$$DAN = \frac{|[C]_{exp} - [C]_{RL}|}{[C]_{exp} + [C]_{RL}} \quad (22)$$

onde $\overline{[C]_{exp}}$ é a média das concentrações registradas experimentalmente, $\overline{[C]_{RL}}$ é a média das concentrações estimadas pela regressão linear e $\overline{|[C]_{exp} - [C]_{RL}|}$ é a média das diferenças entre essas concentrações.

Tabela 1 - Diferença Absoluta Normalizada entre os valores de $[C]$ experimentais e obtidos por regressão linear

	Experimento 1	Experimento 2	Experimento 3	Experimento 4
DAN	$9,92 \times 10^{-3}$	$6,43 \times 10^{-3}$	$7,04 \times 10^{-3}$	$6,38 \times 10^{-3}$

Fonte: os autores

Tabela 2 - Diferença Absoluta Normalizada entre os valores de $1/[C]$ experimentais e obtidos por regressão linear

	Experimento 1	Experimento 2	Experimento 3	Experimento 4
DAN	$36,96 \times 10^{-3}$	$31,89 \times 10^{-3}$	$34,02 \times 10^{-3}$	$38,43 \times 10^{-3}$

Fonte: os autores

Tabela 3 - Diferença Absoluta Normalizada entre os valores de $\ln [C]/[C_0]$ experimentais e obtidos por regressão linear

	Experimento 1	Experimento 2	Experimento 3	Experimento 4
DAN	$39,19 \times 10^{-3}$	$34,46 \times 10^{-3}$	$33,23 \times 10^{-3}$	$34,60 \times 10^{-3}$

Fonte: os autores

De fato, faz sentido que a reação considerada seja de ordem zero, uma vez que em uma reação dessa ordem a alteração da concentração de um reagente não altera a sua velocidade, diferentemente do que ocorre em reações de ordens maiores. Neste caso, considerando-se a velocidade média em cada um dos quatro experimentos realizados (dados apresentados na Tabela 4), nota-se que praticamente não houve alteração na mesma, ainda que se tenha variado a concentração do reagente, o que reforça o fato de que a reação em questão é realmente de ordem zero.

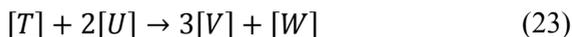
Tabela 4 - Velocidade média da reação em cada experimento

Experimento 1 (0,5 ml de catecol)	Experimento 2 (0,75 ml de catecol)	Experimento 3 (1 ml de catecol)	Experimento 4 (1,5 ml de catecol)
$1,4 \times 10^{-3}$	$1,3 \times 10^{-3}$	$1,1 \times 10^{-3}$	$1,4 \times 10^{-3}$

Fonte: os autores

Modelo Matemático

Ao se considerar uma reação hipotética do tipo



onde $[T]$ e $[U]$ são as concentrações de reagentes e $[V]$ e $[W]$ são as concentrações dos produtos da reação, é importante destacar, conforme Atkins (1997), que há diversas velocidades associadas a ela (uma para cada substância envolvida na reação), de tal modo que

$$\frac{d[W]}{dt} = \frac{1}{3} \frac{d[V]}{dt} = \frac{-d[T]}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d[U]}{dt} \quad (24)$$

onde a diferença de sinal se dá com o intuito de evitar um valor negativo para a velocidade, uma vez que a concentração do reagente é decrescente e, portanto, com variação negativa, mas que podem ser definidas como

$$v = \frac{1}{\nu_C} \frac{d[C]}{dt} \quad (25)$$

onde ν_C é o número estequiométrico da substância C , com valor positivo se C for produto, e negativo, se C for reagente.

Considerando-se $[C]$ a concentração do único produto de uma reação de primeira ordem, tem-se então que a velocidade é diretamente proporcional à concentração deste produto elevada à primeira potência, isto é,

$$v = \frac{d[C]}{dt} = k[C] \quad (26)$$

onde k é a constante de velocidade.

Numa reação de segunda ordem,

$$v = \frac{d[C]}{dt} = k[C]^2 \quad (27)$$

Analogamente, numa reação de ordem zero,

$$v = \frac{d[C]}{dt} = k \quad (28)$$

que é, portanto, o modelo que descreve a velocidade da reação considerada neste trabalho.

Solução Analítica

O modelo apresentado na Equação 28 é facilmente resolvido analiticamente. Integrando-o

$$\int_{[C_0]}^{[C]} d[C] = k \int_0^t dt \quad (29)$$

obtém-se

$$C(t) = kt + [C_0] \quad (30)$$

onde k é o coeficiente angular da reta, que no presente trabalho foi determinado pelo Método dos Mínimos Quadrados, utilizando-se os dados do Experimento 1, de forma que $k = 0,0006$. Já as concentrações iniciais, em mol/L, por sua vez, têm valores distintos em cada experimento: $C_0 = 0,221$ no primeiro; $C_0 = 0,226$ no segundo; $C_0 = 0,171$ no terceiro; e $C_0 = 0,205$ no quarto.

Solução Numérica

A equação diferencial que modela a velocidade dessa reação química (Equação 28) também pode ser resolvida por meio de técnicas numéricas, como os métodos de Runge-Kutta (de primeira, segunda, terceira e quarta ordem).

Pelo método de Euler (Runge-Kutta de primeira ordem), tem-se que (RUGGIERO; LOPES, 1996):

$$[C]_{n+1} = [C]_n + hf(t_n, [C]_n) \quad (31)$$

onde h é o passo de integração e $n = 1, 2, 3, \dots$

Mas para uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) do tipo

$$[C]' = k \quad (32)$$

tem-se que

$$f(t_n, [C]_n) = k \quad (33)$$

para qualquer valor de n . Assim,

$$[C]_{n+1} = [C]_n + hk \quad (34)$$

Como o valor de k já foi determinado anteriormente, com base nos dados do Experimento 1 ($k = 0,0006$), fazendo-se $h = 20$, a Equação 34 se resume a

$$[C]_{n+1} = [C]_n + 0,012 \quad (35)$$

Além do Método de Euler, os métodos de Runge-Kutta de ordens maiores também poderiam ser utilizados para resolver o problema. Entretanto, a aproximação da equação da velocidade de uma reação de ordem zero por Runge-Kutta, independentemente da ordem do método, se resume ao método de Euler, pois como a EDO é do tipo

dado pela Equação 28, a forma geral do método de segunda ordem (Euler Aperfeiçoado) que, adaptada de Ruggiero e Lopes (1996), pode ser escrita como

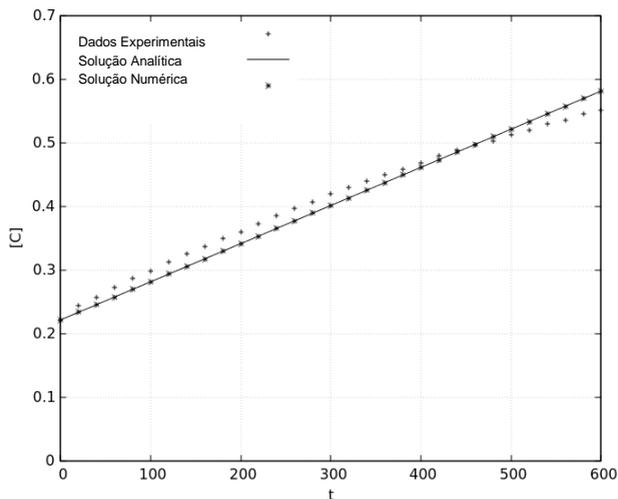
$$[C]_{n+1} = [C]_n + \frac{h}{2} [f(t_n, [C]_n) + f(t_n + h, [C]_n + hf(t_n, [C]_n))] \quad (36)$$

volta a tomar a forma da Equação 34, uma vez que $f(t_n, [C]_n) = k$ para quaisquer valores de t_n e $[C]_n$.

Análise dos Resultados

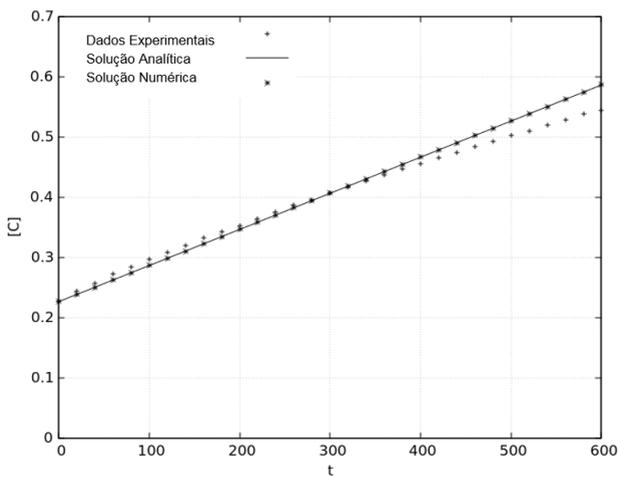
Os resultados obtidos resolvendo-se a equação diferencial, dada pela Equação 28, analiticamente (Equação 30) e numericamente (Equação 35) são apresentados nas Figuras 5, 6, 7 e 8, juntamente com os dados coletados na realização dos quatro experimentos. Nelas, pode-se observar que os resultados analíticos e numéricos coincidem e aproximam-se consideravelmente dos valores experimentais. Nos Experimentos 1 (Figura 4), 2 (Figura 5) e 4 (Figura 7), o modelo prediz muito bem as concentrações, ainda que no caso específico do Experimento 4 o modelo apresente uma leve tendência a superestimar os valores experimentais. No Experimento 3 (Figura 6), por sua vez, os valores experimentais são bem preditos até cerca de 250 segundos. Após isso, os valores distanciam-se consideravelmente.

Figura 4 - Comparação entre os resultados do Experimento 1



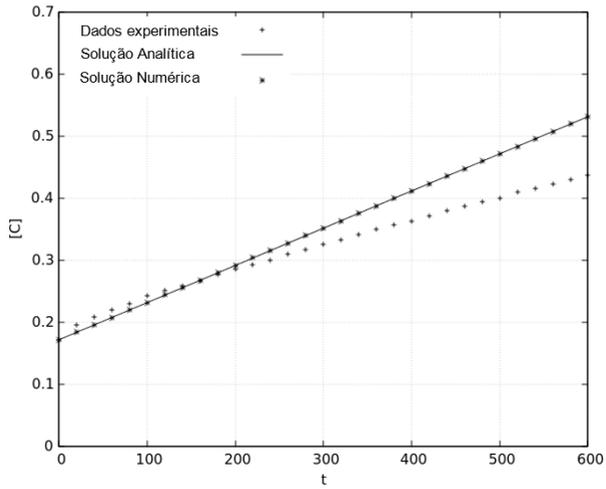
Fonte: os autores

Figura 5 - Comparação entre os resultados do Experimento 2



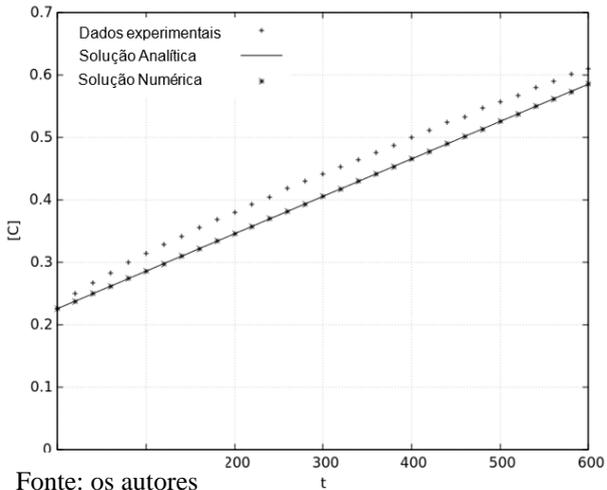
Fonte: os autores

Figura 6 - Comparação entre os resultados do Experimento 3



Fonte: os autores

Figura 7 - Comparação entre os resultados do Experimento 4



Fonte: os autores

No entanto, deve-se considerar que, em reações de qualquer ordem, ao se aumentar a concentração de reagente, ou a velocidade se mantém constante (reação de ordem zero), ou deve aumentar (reações de ordem $n \geq 1$). De fato, não é o que se observa no caso do Experimento 3, em que a taxa de variação da concentração em função do tempo parece diminuir à medida que a concentração do reagente aumenta, indicando uma possível falha na execução do experimento.

No caso do Experimento 1, tem-se um erro relativo máximo de 6,2%, razoável pela magnitude dos valores, uma vez que o erro absoluto máximo é de apenas 3×10^{-2} , registrado no instante $t = 600$ segundos. No caso do Experimento 2, o erro relativo máximo é de 7,7%, pouco maior que o anterior, mas também admissível, dada a magnitude dos valores, sendo o erro absoluto máximo igual a $4,2 \times 10^{-2}$, registrado novamente no instante $t = 600$ segundos. Apenas no Experimento 4 é que o erro relativo máximo torna-se um pouco maior, igual a 9,6%, porém com erro absoluto de apenas $3,7 \times 10^{-2}$, registrado no instante $t = 260$ segundos. Diante do exposto, pode-se então aferir que o modelo foi capaz de prever, com razoável precisão, as concentrações do produto da reação considerada, independentemente do método de resolução utilizado (analítico ou numérico), uma vez que os dois procedimentos forneceram os mesmos resultados.

Considerações Finais

Conforme destaca Bassanezi (1999), modelo matemático consiste em equações desenvolvidas para representar algum fenômeno real, sendo que a sua aceitação depende, por essência, dos objetivos e da disponibilidade de recursos do modelador, não sendo a complexidade uma característica fundamentalmente necessária ao modelo, uma vez que em determinadas situações um modelo parcial e simples pode ser de maior utilidade do que um modelo complexo.

Nesse contexto, no presente trabalho foi descrita uma prática acadêmica de modelagem em que induziu-se uma reação química em laboratório, com a finalidade de registrar os valores da absorvância de

tempo em tempo para, assim, determinar a ordem da reação e estabelecer parâmetros de comparação para os resultados obtidos, empregando-se modelos matemáticos. Determinada a ordem da reação, foi definido o modelo matemático a ser resolvido: um modelo baseado em uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem. A resolução analítica se deu na sequência. Para a resolução numérica, dentre os vários métodos existentes para a resolução de EDOs, foram escolhidos os de Runge-Kutta, que, pela simplicidade da equação envolvida, resumiram-se ao método de Euler (Runge-Kutta de primeira ordem). Em ambos os casos (resoluções analítica e numérica), foram registradas as concentrações do produto em instantes de tempo, visando à comparação destes valores com os dados experimentais, objetivando a validação do modelo, que ocorreu na sequência, quando verificou-se a capacidade dele de representar, com precisão, o fenômeno químico real.

REFERÊNCIAS

- ATKINS, P.W. **Físico-Química**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1997.
- BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática - Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores**. In: XXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Santos, SP, 1999, p. 9-22.
- DEHIMI, S.; HADDAD, D.; MEBARKI, B.; BENDRIS, T.; AISSAT, A. Thermal field under the effect of the chemical reaction of a direct internal reforming solid oxide fuel cell DIR-SOFC. **International journal of hydrogen energy**, v. 39, p.15261-15265, 2014.
- FELTRE, R. **Química: Físico-Química**. 6. ed. São Paulo: Moderna, 2004.

FONSECA, M. R. M. **Química**: Físico-Química. São Paulo: FTD, 1992.

GORSKII, V. G. & ZEINALOV, M. Z. Mathematical Modeling of the Chemical Reaction Kinetics in the Quasi-equilibrium and Quasi-stationary Approximation. **Theoretical Foundations of Chemical Engineering**, v. 37, p.184-190, 2003.

KOTZ, J. C.; TREICHEL, P. **Química e Reações Químicas**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

LEVANOV, A.V.; ANTIPENKO, E.E.; LUNIN, V.V. Chemical reaction kinetics in the afterglow of electrical discharges in hydrogen-oxygen systems ($H_2 + O_2$, H_2O_2 , H_2O) and in the mixture $H_2 + CO_2$. **Moscow University Chemistry Bulletin**, v. 65, p. 341-349, 2010.

OKINO, M.S.; MAVROVOUNIOTIS, M.L. Simplification of Mathematical Models of Chemical Reaction Systems. **Chemical Reviews**, v. 98, p. 391-408, 1998.

RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.R. **Cálculo Numérico**: Aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996.

SCHAICH, D.; BECKER, R.; KING, R. Qualitative modelling for automatic identification of mathematical models of chemical reaction systems. **Control engineering practice**, v. 9, p. 1373-1381, 2001.

SZÉKELY, T.; BURRAGE, K.; ERBAN, R.; ZYGALAKIS, K.C. A higher-order numerical framework for stochastic simulation of chemical reaction systems. **BMC Systems Biology**, v.6, p. 85-104, 2012.

Experiências com Modelagem Matemática e Equações Diferenciais Num Curso de Licenciatura em Matemática

Delair Bavaresco¹
Angéli Cervi Gabbi²

Introdução

A Modelagem tem sido utilizada como metodologia no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, bem como é tema de muitas pesquisas realizadas no meio acadêmico. No momento em que o estudante visualiza a aplicabilidade de determinado conceito no seu dia a dia, este torna-se significativo para o educando, pois consegue levar para o cotidiano o que lhe foi ensinado em sala de aula. Nesta experiência, relatamos um processo de investigação

¹ Doutor em Educação pela UNISINOS, Mestre em Modelagem Matemática pela UNIJUÍ, Licenciado em Matemática pela UFSM. Docente do Instituto Federal Rio Grande do Sul (IFRS), Câmpus Bento Gonçalves.

E-mail: delair.bavaresco@bento.ifrs.edu.br

² Doutora em Educação nas Ciências pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ), Mestre em Modelagem Matemática e Licenciada em Matemática pela mesma Instituição. Docente do Instituto Federal Rio Grande do Sul (IFRS), Câmpus Ibirubá.

E-mail: angeli.gabbi@ibiruba.ifrs.edu.br

desenvolvida com o uso de diferentes recursos e com aplicabilidade de conceitos teorizados ao longo do curso.

Dessa forma, a Modelagem torna-se importante no processo de ensino e aprendizagem porque permite a realização de atividades de exploração e investigação, que se caracterizam por apresentar objetivos pouco estruturados, mas que, por meio de formulações, experimentações e aperfeiçoamentos, vão sendo melhorados. Para Bassanezi (2015), faz-se necessário buscar alternativas de ensino e aprendizagem que facilitem a compreensão da matemática e sua utilização. Segundo o autor, a Modelagem Matemática é capaz de unir teoria e prática, motivar o aluno no entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. “A modelagem é o processo de criação de modelos em que estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente sobre a *sua realidade*, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador” (BASSANEZI, 2015, p. 15, grifos do autor).

Biembengut e Hein definem a Modelagem Matemática como um processo

[...] que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além do conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas (2003, p. 12).

Assim, esta metodologia de ensino está diretamente relacionada à necessidade de privilegiar, nas atividades curriculares, a possibilidade de o estudante escolher temas relacionados com a sua realidade e o seu interesse, onde o principal objetivo não é de se chegar a um modelo, mas, por meio das etapas e processos, aonde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado.

Para Barbosa,

[...] o ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta (2004, p. 75).

Nesse sentido, o docente tem a missão de cativar os estudantes para esse ambiente de aprendizagem, mediante um convite à investigação, despertando a curiosidade e levando os estudantes a formularem hipóteses, na procura de comprovações ou reformulações.

[...] A modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio da pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p. 18).

Assim, por meio da Matemática, os estudantes buscam compreender, explicar e contraditar as indagações formuladas sobre a situação originada em outras áreas do conhecimento.

Procedimentos Metodológicos

Ao longo do processo formativo do estudante de Licenciatura em Matemática, é massiva a teorização de diversos conceitos de Matemática, desde funções e geometria até equações diferenciais e noções de programação. No entanto, são quase inexistentes momentos de problematizações práticas ou de investigações que busquem

soluções de problemas reais. A Modelagem Matemática, quando existente nos currículos desses cursos, subverte essa sequência, levando o estudante a pensar sobre outra perspectiva. Ocorre que, na maioria dos casos, são estudados conceitos teóricos e, posteriormente, são exemplificadas possíveis aplicações. Na Modelagem Matemática, ocorre o processo inverso, ou seja, diante de um fenômeno real ou da necessidade de busca por solução de um problema observado, o estudante utiliza ferramentas teóricas e tecnológicas para realizar a investigação, analisar o fenômeno e apontar soluções ou fatores de otimizações.

No início da disciplina de Modelagem Matemática do IFRS-Campus Bento Gonçalves, são estudados os principais modelos clássicos abordados nesse componente curricular, tais como Crescimento Populacional, Resfriamento de Newton, Contaminação de Doenças, Massa Mola, Pêndulo, Misturas, Drenagem de Tanque. Em seguida, o professor lança a proposta de definição de um tema para pesquisa, com preferência por aqueles em que possam ser realizadas medições experimentais, sugerindo modificações ou variações dos modelos clássicos estudados. No entanto, não é vedada a escolha de temas não ligados aos modelos clássicos.

Nas aulas da referida disciplina, também são apresentadas metodologias de medições e coleta de dados, tais como fotos, vídeos com captura de dados via software Tracker, uso de sensores eletrônicos com plataforma Arduino, uso de sensores mecânicos ou digitais (termômetros, manômetros, paquímetros).

Em seguida, a turma é dividida em grupos e tem-se o período de definição dos temas. Inicialmente, os estudantes apresentam ideias e propostas de temas de estudos e de realização de episódios de Modelagem Matemática. Juntamente com os professores envolvidos e demais colegas da turma, os temas propostos pelos grupos são avaliados a partir do desenvolvimento da pesquisa, considerando-se as possibilidades de se realizar num semestre e em duas disciplinas.

Uma vez aprovado o tema de cada grupo de estudantes, o processo que segue é o aprofundamento teórico do tema escolhido. Em seguida, tem-se o processo de obtenção de modelos ou uso de modelos clássicos com possíveis adequações ou aprimoramentos. Posteriormente, segue a realização de atividades experimentais para obtenção de dados, validação de modelos e/ou obtenção de parâmetros. Por fim, é elaborado um artigo ou resumo expandido e, no último encontro do semestre, cada grupo de estudantes apresenta para os demais colegas sua experiência e os resultados alcançados, elencando potencialidades e fragilidades da atividade.

Neste capítulo, faremos a descrição de três trabalhos realizados pelos estudantes na disciplina de Modelagem Matemática do primeiro semestre do ano de 2019.

Resultados e Discussões

Conforme descrito acima, a experiência teve um período inicial no qual os estudantes formaram equipes e definiram os temas de investigação, seguido do aprofundamento teórico, da obtenção de modelos e da realização de experimentos para, finalmente, realizarem discussões e sintetizarem a experiência em um texto. Detalhamos, a seguir, cada uma dessas etapas para os três trabalhos escolhidos.

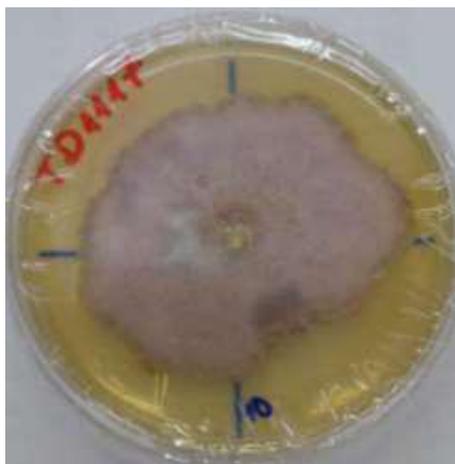
Sobre os Temas Abordados na Disciplina de Modelagem Matemática

Os três trabalhos que aqui apresentamos e discutimos são propostas bastante distintas, nas quais os estudantes, sob orientação dos professores, obtiveram resultados bastante satisfatórios ante a proposta da realização da atividade interdisciplinar entre Modelagem Matemática e Equações Diferenciais.

O primeiro trabalho que aqui apresentamos (Grupo 01) teve por título “Dinâmica Populacional de Fungos Causadores de Doenças de

Tronco em Videiras”. Esse trabalho se constituiu a partir de uma problemática enfrentada na região da Serra Gaúcha relativa aos estudos de Fitossanidade. O tema do trabalho esteve voltado para entender a dinâmica do crescimento de fungos causadores de doenças de tronco em videiras. O objetivo central foi estudar o crescimento desses fungos, comparar com os modelos clássicos de crescimento populacional, determinar parâmetros e identificar peculiaridades por meio da realização de testes experimentais através da criação de colônias de fungos em placas de Petri (Figura 1).

Figura 1 - TD 1117, vigésimo dia de experimento (05/05/2019)

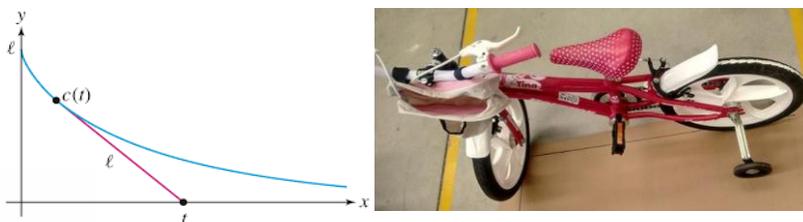


Fonte: Extraída do trabalho entregue pelo Grupo 01

O segundo trabalho (Grupo 02) que escolhemos teve por título “A Modelagem Matemática do Escoamento de Líquido entre Vasos Comunicantes”. Surgiu a partir de um desafio lançado por um professor de Física associado a uma outra problemática da produção

O terceiro trabalho destacado (Grupo 03) teve por título “Tractriz: Uma Abordagem na Perspectiva da Modelagem Matemática e da Geometria dos Rastros”, tendo se constituído a partir de um desafio proposto nas atividades complementares de um livro de Equações Diferenciais. O trabalho traz discussões sobre uma curva particular, do conjunto de curvas de perseguição, a Tractriz. Essa é a curva que decorre do movimento de um bloco sendo puxado por uma corda de comprimento constante. Essa corda, inicialmente posicionada na vertical, quando deslocada sua extremidade oposta ao bloco, na direção horizontal, o caminho descrito pelo bloco será a curva de perseguição Tractriz (Figura 3). O objetivo do trabalho foi obter a equação característica da Tractriz e avaliar, experimentalmente, a partir do rastro da roda traseira de uma bicicleta, cujo movimento se inicia perpendicular à roda dianteira.

Figura 3 - Curva de perseguição Tractriz



Fonte: Extraída do trabalho entregue pelo Grupo 03

Sobre o Aprofundamento Teórico e a Obtenção de Modelos

A Modelagem Matemática é a descrição ou representação de um fenômeno, por meio de equações, símbolos ou fórmulas matemáticas. Nesse processo, são muitas as possibilidades de uso dessas ferramentas matemáticas. No entanto, dependendo do nível de ensino que está sendo trabalhado, algumas possibilidades ficam mais restritas, como é o caso do uso de Equações Diferenciais. Para esta

experiência, como a atividade foi desenvolvida em conjunto com o componente curricular de Equações Diferenciais, todos os trabalhos, obrigatoriamente, precisavam apresentar discussões sobre a solução analítica das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) representativas dos modelos.

O trabalho que tratou da dinâmica de fungos causadores de doenças em videiras discutiu as soluções dos modelos clássicos de Malthus, Verhulst e Gompertz, caracterizados por Equações Diferenciais de primeira ordem, com ênfase para a determinação da constante de crescimento e da capacidade de suporte com base no comportamento dos dados experimentais. Por se tratar de um estudo no qual a população aumenta a cada período de tempo, a ênfase foi dada aos modelos matemáticos relacionados à dinâmica populacional.

O modelo de Malthus toma por preceito que uma população é proporcional à própria população e cada período de tempo (BASSANEZI, 2009). Esse modelo é definido pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = rP \quad (1)$$

cujas solução analítica resulta na função exponencial:

$$P(t) = P_0 e^{rt} \quad (2)$$

sendo que P_0 representa a população inicial, r representa a taxa de crescimento (que neste caso, sempre é constante) e t o tempo.

Pelo fato de que esse modelo não estabelece um limite máximo de indivíduos para a população, afirmando que a população estaria crescendo infinitamente, tornou-se pouco adequado à situação. Por essa razão, os modelos de Verhulst (1837) e de Gompertz (1825) estariam mais adequados ao estudo.

Conforme nos diz Bassanezi (2009), “o Modelo de Verhulst supõe que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar” numa capacidade suporte k . Já o modelo de Gompertz, ainda de acordo com Bassanezi (2009), utiliza uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao logaritmo dessa variável.

O modelo de Verhulst é dado por:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k} \right), \quad (3)$$

cuja solução analítica, obtida pelo método da separação de variáveis, é dada por:

$$P(t) = \frac{kP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}} \quad (4)$$

Já o modelo de Gompertz é dado por:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b \ln(P)), \quad (5)$$

cuja solução analítica também pode ser obtida pelo método da separação de variáveis, é dada por:

$$P(t) = e^{\frac{a}{b} - ce^{-bt}} \quad (6)$$

sendo que, nesta equação, $\frac{a}{b} = \ln(k)$, onde k é a capacidade suporte conhecida.

O trabalho do grupo 03 (curva Tractriz) parte da caracterização dessa curva a partir das chamadas curvas de perseguição¹ e usa relações algébricas e geométricas da geometria analítica, inclinação da reta como taxa de variação e parametrização por meio de coordenadas polares.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{\varepsilon^2 - y^2}} \quad (7)$$

A solução obtida pelo método da separação de variáveis, valendo-se da parametrização $y = \varepsilon \cdot \text{sen}(\beta)$, sendo β o ângulo formado pela corda e o sentido do deslocamento é dada, implicitamente, por:

$$x = \varepsilon \cdot \ln\left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{\varepsilon^2 - y^2} \quad (8)$$

na qual ε é o comprimento da corda.

O trabalho sobre escoamento de líquidos demandou uma familiarização com conceitos da hidrodinâmica, tais como a Equação da Continuidade e a Equação de Bernoulli. A caracterização dos recipientes foi definida a partir de suas características geométricas, tais como raio da base e altura de cada recipiente e raio do tubo de ligação

¹ Em uma curva de perseguição, o perseguidor move-se apontando sempre diretamente para o perseguido e a velocidade do perseguidor é diretamente proporcional à do perseguido.

entre os recipientes. Diante disso, a variação da altura em função do tempo resultou numa equação diferencial dada por:

$$\frac{dz}{dt} = k\sqrt{z - z_e} \quad (9)$$

sendo z_e a altura de equilíbrio final do líquido e k a constante obtida pelas medidas geométricas do recipiente dada por:

$$k = -\frac{S_0}{S_1} \sqrt{\frac{2g}{S_0}} \cdot \sqrt{S_1 + S_2} \quad (10)$$

na qual S_0 é a área da seção transversal do tubo de comunicação entre os dois recipientes, S_1 e S_2 a área da base dos recipientes 1 e 2, respectivamente, e g a constante gravitacional. A solução analítica dessa equação diferencial, obtida pelo método da separação de variáveis, resulta em:

$$z(t) = z_e + \left(\sqrt{z_0 + z_e} - \frac{S_0}{2S_1} \sqrt{2g \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) \cdot t} \right)^2 \quad (11)$$

onde z_0 é a altura inicial do líquido.

Sobre a Realização dos Experimentos

A parte experimental sempre é um grande desafio na realização de episódios de Modelagem Matemática, pois exige o domínio de algumas técnicas de mensuração e coleta de dados para a obtenção de resultados precisos e satisfatórios. No curso de Modelagem Matemática do campus Bento Gonçalves do IFRS, são estudadas algumas técnicas que dão mais precisão de acordo com cada circunstância. Os clássicos fita métrica, paquímetro, balança e termômetro sempre são de grande utilidade na obtenção de dados

experimentais; no entanto, algumas técnicas mais apuradas podem fornecer maior e mais preciso conjunto de dados. No caso de fenômenos dinâmicos lentos, que levam vários dias, pode ser estratégica a utilização de fotos; já para dinâmicas rápidas o uso de filmagens pode gerar grandes conjuntos de dados e maior precisão. Nesse sentido, uma excelente ferramenta é o software Tracker, que realiza automaticamente a captura de dados para cada quadro da filmagem.

A coleta de dados, por meio de sensores eletrônicos, geralmente fornece dados bastante precisos e em grandes quantidades. No entanto, pode gerar altos custos e demandar a instalação de bancadas experimentais complexas. Contrariando essa lógica, recentemente vem ganhando espaço, nas pesquisas, o uso de sensores controlados pela plataforma de prototipagem eletrônica Arduino. Com baixo custo e grande versatilidade, pode gerar conjuntos de dados amplos e bastante precisos. Nela, podem ser configurados sensores, tais como de distância, temperatura, umidade, contagem.

Nos episódios de Modelagem Matemática aqui relatados, no trabalho sobre fungos foi realizada a mensuração diária do diâmetro ocupado pelo fungo utilizando-se de régua e marcações na placa de Petri (Figura 4). O trabalho foi realizado com o auxílio de um professor da área de Fitossanidade e utilizando-se o laboratório de Fitopatologias da instituição. Para tal, foi criado o meio de cultivo denominado BDA (Batata Dextrose Agar), utilizado em pesquisas da área.

Figura 4 - TD 1110, sexto dia de experimento (21/04/2019)

Fonte: Extraída do trabalho entregue pelo Grupo 01

Já para o episódio da dinâmica do líquido, foi utilizado Arduino com um sensor de distância. Nesse caso, um sensor de distância a laser foi colocado na extremidade do tanque com maior volume inicial e capturados os dados da variação da distância ao longo do escoamento do líquido para o outro recipiente (Figura 5). Para a realização do escoamento, foi enchido um dos tanques, enquanto o tubo de conexão era mantido fechado. Após a liberação da passagem do líquido pelo tubo, houve o escoamento até a posição de equilíbrio.

Figura 5 - Posição de equilíbrio



Fonte: Extraída do trabalho entregue pelo Grupo 02

No caso do trabalho da Tractriz, foram utilizados fita métrica e paquímetro para determinar a variação do rastro deixado pela roda da bicicleta no papel (Figura 6). Para a demarcação do rastro, foi espalhada tinta fresca na extremidade da roda.

Figura 6 - Marcação da Tractriz utilizando papel

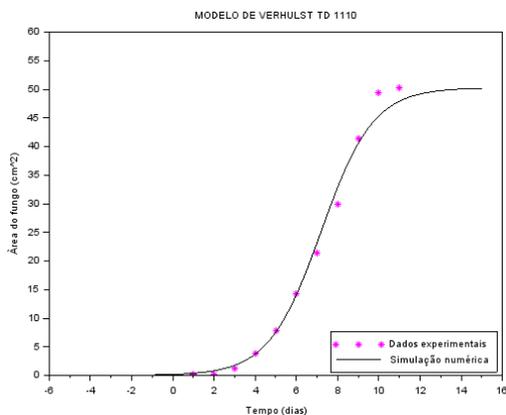


Fonte: Extraída do trabalho entregue pelo Grupo 03

Sobre os resultados apresentados pelos três grupos

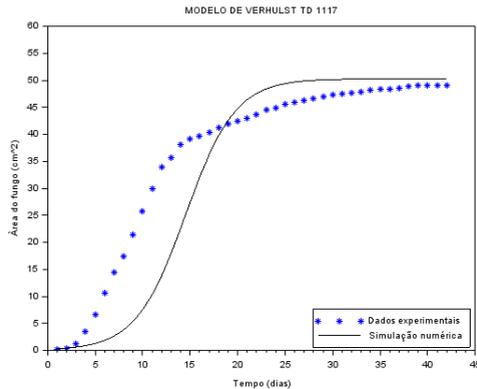
Após a coleta de dados, estes foram tabelados e inseridos no software Scilab para plotagem dos gráficos de dispersão e posterior comparação com a curva teórica dada pelo modelo matemático. No trabalho sobre fungos (Grupo 01), as discussões se deram predominantemente com relação à determinação da constante de crescimento, uma vez que a população inicial era conhecida e a capacidade suportada era a área total da placa de Petri. Nesse trabalho, foram testadas duas espécies de fungo. Para uma delas, a espécie DT 1110, o modelo de Verhulst representou satisfatoriamente a dinâmica de crescimento, como ilustra a Figura 7.

Figura 7 - Simulação do Modelo de Verhulst para o fungo TD 1110



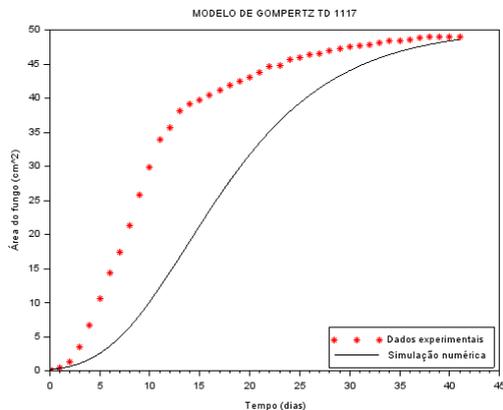
Fonte: Extraída do trabalho entregue pelo Grupo 01

Já para a espécie DT 1117, o fungo não cresceu até a capacidade suporte e apresentou comportamento bastante discrepante com relação ao modelo de Verhulst, conforme a Figura 8.

Figura 8 - Simulação do Modelo de Verhulst para o fungo TD 1117

Fonte: Extraída do trabalho entregue pelo Grupo 01

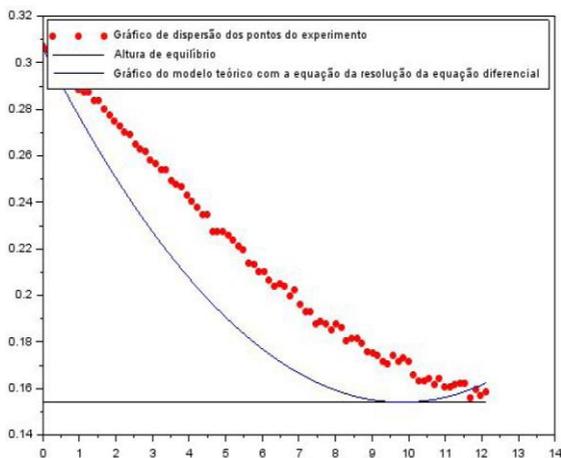
Diante disso, as estudantes testaram o modelo de Gompertz, porém, mesmo assim o resultado não foi satisfatório, como mostra a Figura 9.

Figura 9 - Simulação do Modelo de Gompertz para o fungo TD 1117

Fonte: Extraída do trabalho entregue pelo Grupo 01

Para o trabalho do escoamento de líquidos (Grupo 02), os dados experimentais mostraram-se bastante discrepantes em relação à curva teórica simulada para os mesmos parâmetros do experimento (Figura 10). Diante disso, a discussão principal se deu sobre os erros identificados.

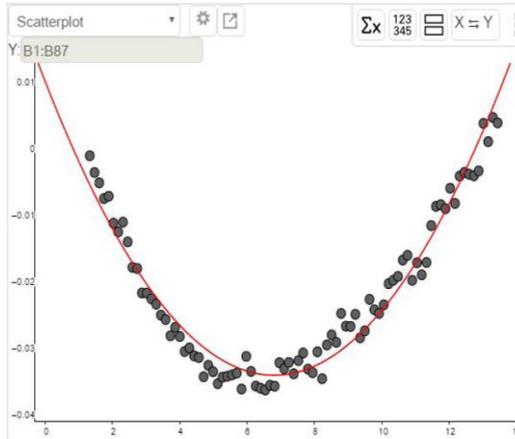
Figura 10 - Gráfico dos modelos teórico e experimental, no software “Scilab”



Fonte: Extraída do trabalho entregue pelo Grupo 02

Ocorre que o modelo retrata uma situação de escoamento ideal, ou seja, sem considerar uma série de fatores, tais como atrito e turbulência, entre outros que chamamos de perda de carga. Por essa razão, foi construído o gráfico de erros, que apresentou comportamento semelhante a uma parábola, obrigando a um ajuste quadrático para modelar o erro decorrente da soma da perda de carga do escoamento, como mostra a Figura 11.

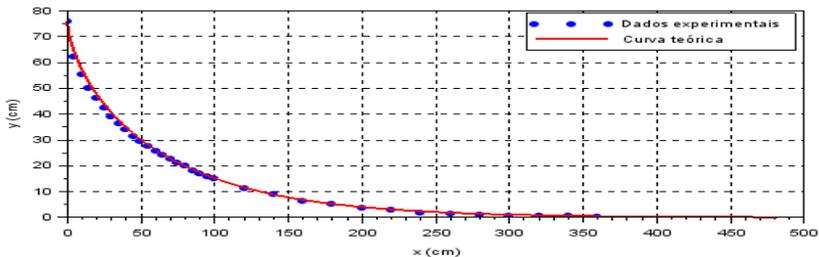
Figura 11 - Gráfico da regressão polinomial de ordem 2 a partir dos pontos do erro, no software GeoGebra



Fonte: Extraída do trabalho entregue pelo Grupo 02

Com relação ao trabalho sobre a curva Tractriz (Grupo 03), já era esperado que o resultado experimental se aproximasse muito da curva teórica, por se tratar de um fenômeno cuja representação pelo modelo não era uma simplificação da realidade, conforme mostra a Figura 12.

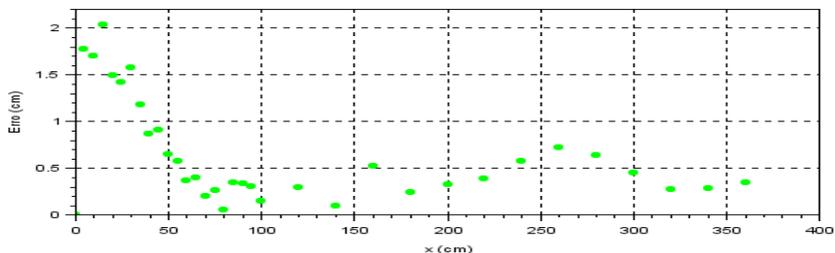
Figura 12 - Curva Tractriz ideal com pontos experimentais



Fonte: Extraída do trabalho entregue pelo Grupo 03

No entanto, ao construir o gráfico de erros foi observada uma discrepância significativamente maior no início da trajetória, conforme podemos visualizar na Figura 13.

Figura 13 - Gráfico de erros



Fonte: Extraída do trabalho entregue pelo Grupo 03

A tendência do erro apresentou um comportamento semelhante ao da própria curva Tractriz, diminuindo de amplitude ao longo da curva. Após meio metro, o erro ficou sempre abaixo de um por cento, podendo ser considerado uma imprecisão das medições. Mesmo assim, permaneceu sempre positivo e com maior amplitude no trecho inicial, levando os autores a acreditarem que havia algum fator não considerado na representação do rastro da roda traseira da bicicleta por meio de uma curva Tractriz.

Considerações Finais

A abordagem de situações envolvendo a realidade dos estudantes em sala de aula possibilita um conhecimento matemático mais significativo, visto que, mediante o levantamento de dados e a experimentação, conduz ao desenvolvimento e à aplicação de conceitos matemáticos. Além disso, proporciona maior interesse, entusiasmo e motivação pelos conteúdos abordados em sala de aula, corroborando para a formação de sujeitos críticos e reflexivos.

A realização de experimentos é uma atividade que gera grandes expectativas por parte dos estudantes, uma vez que, raramente, esse tipo de atividade é proporcionado ao longo do curso de licenciatura. Nesse aspecto, destacamos um grande envolvimento dos grupos nessa etapa do trabalho.

A vivência dessas experiências nos levam a uma série de reflexões com relação à prática da Modelagem Matemática na Licenciatura. Bassanezi (2011) destaca que a Modelagem Matemática deve seguir uma série de etapas, entre elas a modificação, ou seja, a última etapa no processo, em que os modelos podem ser melhorados, se necessário, e sua reformulação se torna fundamental no processo. Diante disso, ressaltamos que, nas experiências vivenciadas, não houve essa etapa de aprimoramento ou redefinição de modelos em função do tempo e da própria proposta da atividade, atinente a um componente curricular e não a uma pesquisa científica propriamente. O trabalho sobre o crescimento de fungos foi apresentado no Salão de Iniciação Científica da Instituição, sendo, inclusive, agraciado com prêmio de destaque da seção. Já o trabalho sobre a Tractriz foi publicado em um periódico da área de Matemática Aplicada com Qualis B1

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem matemática**: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

Cálculo do Volume de Silos Trincheira

Anderson Piva¹

Bruna Miecoanski²

Pedro Augusto Pereira Borges³

Introdução

O interesse pela modelagem de silos foi provocado inicialmente pela proposta de elaboração de modelos matemáticos na disciplina de Cálculo B⁴ do curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) no ano de 2019 e pela vivência da Bruna (coautora desse trabalho), como filha de agricultores. A família da Bruna cria gado leiteiro e de corte no Rio Grande do Sul e utiliza a silagem de plantas forrageiras⁵ como estratégia para dispor de alimento para os animais ao longo do ano.

¹ Aluno do Curso de Matemática da UFFS. *E-mail:* andersopiva@hotmail.com.

² Aluna do Curso de Matemática da UFFS. *E-mail:* brunamiecoanski@gmail.com.

³ Professor do Curso de Matemática UFFS. *E-mail:* pedro.borges@uffs.edu.br.

⁴ Em Cálculo B, os projetos de modelagem são desenvolvidos paralelamente ao programa tradicional de ensino de integrais, com aulas expositivas, exemplos, aplicações e exercícios. Os alunos escolhem um tema, um problema, desenvolvem os modelos, escrevem um pequeno artigo e apresentam os resultados para a turma.

⁵ O milho e o sorgo, dentre outras, são plantas forrageiras utilizadas para silagem. Para o milho, a matéria seca (o teor de matéria seca é a razão entre a massa de matéria seca e a massa de matéria úmida) no momento da colheita deve estar entre 33 e 37%. (MIRANDA, RESENDE; VALENTE, 2002, p. 1)

O problema inicial de modelagem proposto por Anderson e Bruna, foi determinar o volume de um silo trincheira real, motivados pela possibilidade de aplicar conceitos do cálculo integral para determinar volumes de sólidos irregulares. Ao observar o local, verificaram que o silo apresentava irregularidades (a base e as paredes não eram planos perfeitos, assim como a cobertura não era uma superfície regular), o que exigiu a formulação de hipóteses simplificadoras, tais como seções transversais trapezoidais e curvas da superfície regulares e simétricas. Com isso em mente, realizaram uma série de medidas com o máximo de precisão possível, na tentativa de colher dados do silo real, descrita na segunda seção.

No decorrer do trabalho, perceberam que seria mais proveitoso desenvolver métodos para calcular o volume de silos trincheira em geral, sendo aquele dos pais da Bruna um caso particular. Assim, os métodos poderiam ser úteis para calcular volumes de silos com quaisquer medidas e atender às variáveis do empreendimento rural (número e espécie de animais, tipo de forrageira e período de alimentação) e às características topográficas da propriedade. Para resolver tal problema, desenvolveram, de forma algébrica e algorítmica, quatro métodos de cálculo do volume, descritos e discutidos na terceira seção.

Resolvidos os problemas de modelagem, na quarta seção, é apresentada uma análise da experiência como parte do componente curricular de cálculo, discutindo-se as abordagens e características dos conteúdos matemáticos envolvidos nos modelos e descritas algumas possibilidades de ensinar e aprendê-los, paralelamente ao processo de modelagem.

Alimentação Animal, Dimensões e Métodos de Medição do Silo Trincheira

A silagem é um processo de armazenamento e conservação do alimento animal em construções (silos). A qualidade do alimento, por sua vez, depende das condições de armazenagem. A manutenção dos

nutrientes da forragem depende basicamente de evitar o apodrecimento por excesso de umidade provocado pela infiltração de água da chuva e perda de matéria orgânica, devido à saída de água com nutrientes da massa vegetal, conhecida como chorume. O envolvimento da forragem com lonas plásticas é um procedimento de proteção contra a infiltração pelo solo e pela água da chuva. Particularmente, o formato curvo da cobertura se justifica para evitar a formação de poças e minimizar a infiltração pelas emendas das lonas na superfície superior. O chorume, por sua vez, pode ser retirado por gravidade, o que é resolvido construindo a base do silo com uma pequena inclinação nas direções transversal e longitudinal.

No planejamento da produção animal, o dimensionamento do silo tem sua importância, pois pode minimizar gastos desnecessários ou evitar falta de alimento, com um super ou subdimensionamento, respectivamente. Assim, conhecendo a quantidade de gado a alimentar, o consumo diário de forrageira por animal e a densidade da forrageira é possível determinar o volume do silo necessário para o armazenamento, pela Eq. (1).

$$V = \frac{P \cdot C \cdot N}{d} \quad (1)$$

Onde V é o volume do silo (m^3),

P é o período de alimentação (dias),

C é o consumo diário por animal ($kg/dia \cdot unidade$),

N é o número de animais (unidade) e

d é a densidade da forrageira seca (kg/m^3).

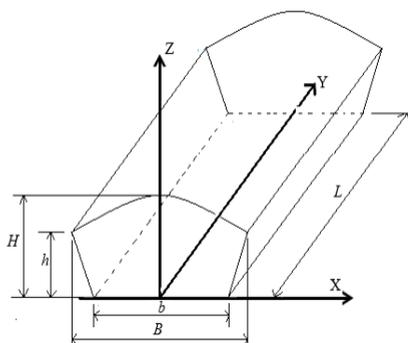
A forma geométrica do silo deve atender a critérios de praticidade (carga e descarga) e proteção da massa (evitar infiltrações e descartar líquidos). Existem diferentes tipos de silos para forrageiras, variando o formato, a forma de descarregamento e os materiais de construção. Vilela define dois tipos:

[...] os silos horizontais e os verticais. Entre os verticais, também conhecidos como silos cilíndricos, encontram-se o meia-encosta, o cisterna e o torre. Entre os horizontais tem-se o trincheira, o de superfície simples sem proteção lateral, e o de superfície com proteção lateral tipo "bunker". (VILELA, 1985, p. 6)

O silo trincheira, escolhido como objeto de modelagem deste trabalho, tem seção transversal trapezoidal. Como a forragem fica envolvida em lona plástica, seu custo é baixo e a construção é simples em relação aos demais. Talvez por isso e pela eficiência na conservação da massa, seja muito empregado no sul do Brasil.

Os modelos desenvolvidos neste trabalho referem-se aos silos trincheira de paredes laterais inclinadas, sem caimento longitudinal, como o da Fig. 1a, cujo esquema com eixos cartesianos e variáveis é mostrado na Fig. 1b.

Figura 1 - (a) Silo trincheira antes do carregamento; (b) Esquema geral do silo trincheira



Fonte: os autores

A cobertura é uma superfície curva com simetria em relação ao plano YZ . Para descrevê-la, foram consideradas onze seções transversais S_i , onde $i = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$, que passam em $y = 0, 2, 4, 6, \dots, 20$ m, mencionada na primeira e segunda colunas, respectivamente, Tab.1. Em cada uma dessas seções, foram escolhidos três pontos, nas posições $x = 0$; 1 e $2, 12$ m para determinar a coordenada z dos pontos (x, y, z) da cobertura. As alturas em $x = -1$ e $-2, 12$ m foram consideradas idênticas àquelas da outra metade. Com duas ripas, uma colocada na horizontal, com um nível de bolha, na direção X , apoiada no ponto máximo da curva ($x=0$) e outra vertical, colocada na posição x do ponto, foram medidas as distâncias (p) entre a ripa e a cobertura. As coordenadas z , foram obtidas subtraindo a altura máxima da cobertura (H em $x = 0$) das distâncias p . Os resultados estão apresentados nas colunas 3, 4 e 5 da Tab. 1. As expressões do volume de cada modelo foram deduzidas para casos gerais, com bases b e B e altura h e H , variáveis para cada seção. Porém, neste trabalho, para efeito de cálculo, foram consideradas constantes.

Evidentemente, a simetria não é perfeita, assim como a superfície da cobertura não é regular. Porém, tais simplificações não interferem significativamente no volume total de silagem e são aceitáveis nos trabalhos de modelagem, visto que o real é extremamente complexo e por isso, impossível de ser contemplado em toda a sua plenitude em modelos matemáticos.

Tabela 1 - Dimensões do silo trincheira (m)

Seção	Comprimento (y)	Alturas (z)		
		x=0	x=1	x=2,12
S ₀	0	0,62	0,60	0,56
S ₁	2	0,68	0,66	0,61
S ₂	4	0,75	0,73	0,67
S ₃	6	0,76	0,74	0,70
S ₄	8	0,80	0,78	0,72
S ₅	10	0,87	0,83	0,74
S ₆	12	0,92	0,88	0,77
S ₇	14	0,97	0,92	0,80
S ₈	16	1,05	0,98	0,83
S ₉	18	1,08	1,01	0,84
S ₁₀	20	1,09	1,03	0,86

Fonte: os autores

Modelos para Calcular o Volume e a Capacidade do Silo

Os processos de modelagem que envolvem muitas hipóteses, dados e longas seqüências de cálculos, tendem a ser complexos do ponto de vista matemático e operacional, já que exigem conteúdos geralmente do ensino superior e sua execução depende do uso de planilhas eletrônicas ou programas de computador. Por isso, a comparação de modelos obtidos a partir de diferentes hipóteses é um recurso para verificar, se os resultados de cada um deles, são coerentes entre si. Nesta seção, são apresentados quatro modelos para o Cálculo do volume do silo. Os Modelos I e III foram desenvolvidos como trabalho de modelagem de cálculo B por Anderson e Bruna. Ao cursar o Cálculo C (funções de mais de duas variáveis), a dupla retomou o problema e propôs o Modelo IV. O Modelo II foi elaborado após essas experiências e se insere neste trabalho como uma possibilidade de exploração de procedimentos matemáticos.

Modelo I: médias de retângulos

O método da média dos retângulos consiste em dividir o sólido em 10 elementos de volume cujas faces paralelas são as seções S_1, S_2, \dots, S_{10} e as espessuras são as diferenças $\Delta y = y_{i+1} - y_i$, para $i = 0, 1, 2, \dots, 9$. Para calcular o volume desses elementos, foi considerada uma aproximação da área dessas seções, multiplicada pela espessura dos respectivos elementos. A soma dos volumes desses elementos é aproximadamente o volume do silo.

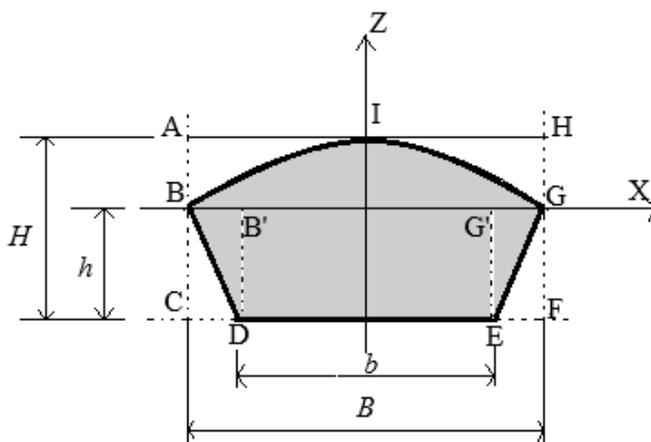
Observando-se a Fig. 2, a área da seção transversal BDEGI está entre as áreas dos retângulos ACFH e B'DEG'. A área da seção transversal é aproximadamente a média aritmética das áreas desses retângulos. Assim, multiplicando-se tal média pelo respectivo comprimento Δy , obtém-se o volume aproximado de cada elemento. O volume do silo é a adição dos 10 elementos, como mostrado na Eq. (2).

$$V_I = \sum_{i=1}^{10} \frac{B_i H_i + b_i h_i}{2} \cdot \Delta y_i \quad , \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, 10. \quad (2)$$

Onde

V_I é o volume do silo obtido pelo Modelo I (m^3),
 $B_i = \overline{CF}$ é a base do retângulo ACFH da seção i (m),
 $H_i = \overline{AC}$ é altura do retângulo ACFH da seção i (m),
 $b_i = \overline{DE}$ é a base do retângulo BCFG da seção i (m),
 $h_i = \overline{EG}$ é a altura do retângulo BCFG da seção i (m) e
 Δy_i = espessura da seção i do silo (m).

O uso do índice i para as bases, alturas e espessuras é uma maneira de expressar o volume, admitindo essas grandezas diferentes para cada seção. No entanto, no presente trabalho, as bases b e B e a espessura Δy foram consideradas constantes.

Figura 2 - Esquema da seção transversal do silo

Fonte: os autores

Modelo II: médias de polígono e trapézio

O Modelo II considera o mesmo seccionamento do silo do Modelo I, porém, com outra hipótese para a aproximação da área da seção transversal. A medida da área da região BDEGI, na Fig. 2, está entre a área do polígono ABDEGH (soma das áreas do trapézio BDEG e do retângulo ABGH) e a área do trapézio BDEG. Um modelo simples para calcular o volume do silo, consiste em considerar a média entre os polígonos ABDEGH e BDEG, como uma aproximação da área da seção transversal e multiplicá-la pelo respectivo comprimento Δy de cada seção, como mostra-se na Eq. (3).

$$V_{II} = \sum_{i=1}^{10} \frac{\frac{B_i+b_i}{2} \cdot h_i + (H_i-h_i)B_i + \frac{B_i+b_i}{2} \cdot h_i}{2} \cdot \Delta y_i = \sum_{i=1}^{10} \frac{B_i H_i + b_i h_i}{2} \cdot \Delta y_i \quad (3)$$

Onde V_{II} é o volume do silo (m^3).

Observe-se que as Eqs (2) e (3) são equivalentes, mesmo que geradas por hipóteses diferentes. Essa constatação suscita uma demonstração geométrica, já que a algébrica decorreu naturalmente. Para isso, pode ser usada a seguinte propriedade:

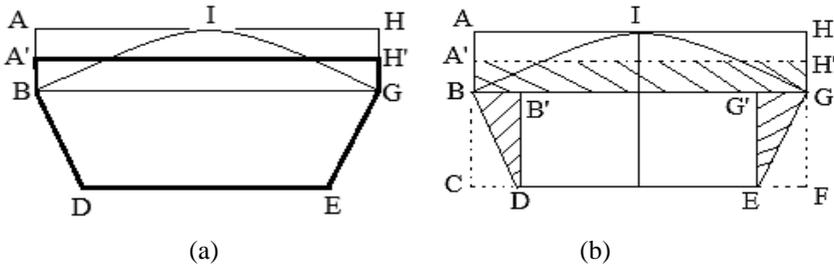
Propriedade da média aritmética: Dados dois números reais a e b , tal que $a < b$, a média entre a e b pode ser escrita como

$$a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Ou seja, a média entre a e b é a soma de a com a metade da diferença entre a e b .

Pretende-se mostrar geometricamente, que a região considerada no Modelo I tem a mesma área da região do Modelo II, $A'H'GEDB$, mostrada na Fig. 3a. Na Fig. 3b, a região $BCDB'$ pode ser seccionada ao meio com a diagonal BD . O mesmo pode ocorrer com a região $G'EFG$ e a diagonal EG . A região $ABGH$ pode ser dividida ao meio por $A'H'$. Assim, pela propriedade da média aritmética, agregando-se as regiões $A'H'GB$, $BB'D$ e $G'GE$ hachuradas na Fig. 3b, à região $B'G'ED$, obtém-se a região equivalente do Modelo II, $A'H'GEDB$, da Fig. 3b, mostrando que as áreas são equivalentes.

Figura 3 - Equivalência das áreas das seções transversais dos Modelos I e II



Fonte: os autores

Modelo III: integral simples

O método da integral simples considera o mesmo seccionamento dos Modelos I e II, porém com a área de cada seção, determinada pela adição das áreas das regiões BGI (A_1) e BDEG (A_2) da Fig. 2: Assim, $A_i = A_{1i} + A_{2i}$, para cada seção $i = 1, 2, 3, \dots, 10$.

A região BGI é limitada pela reta BG e pela curva BIG. Considerando-se um eixo vertical Z de simetria passando no ponto I, (Fig. 2) a área da região BGI (A_1) pode ser obtida pela integração de funções quadráticas ($z_i = f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$) que passam em B, I e G. Para o caso em estudo, a função quadrática é simétrica em relação ao eixo Z, o que leva a $b_i = 0$. Assim, A_1 pode ser calculada pela integral, mostrada na Eq. (4).

$$A_{1i} = 2 \int_0^{B_i/2} (a_i x^2 + c_i) dx \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, 10. \quad (4)$$

Onde A_{1i} é a área da seção transversal i (m^2),
 a_i , e c_i são coeficientes reais e
 x é a variável espacial na direção X (m).

O ponto de interseção do eixo Z com $f_i(x)$ é o ponto de máximo dessa função, cuja ordenada é o valor de c_i , obtido pela diferença entre as alturas H e h (ver Fig.2), expresso na Eq. (5).

$$c_i = H_i - h_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, 10. \quad (5)$$

A função $f_i(x) = a_i x^2 + c_i$ do integrando da Eq. (4) tem uma raiz em $x = B_i/2$. Assim, substituindo as coordenadas do ponto $(B_i/2, 0)$ nessa equação e resolvendo para a_i , determina-se o valor desse coeficiente (Eq. (6)), já que B_i (base maior do trapézio) é também conhecida experimentalmente.

$$a_i = -\frac{4c_i}{B^2} = \frac{4(h_i - H_i)}{B^2} \quad (6)$$

Levando os resultados das Eqs. (5) e (6) na Eq (4) e resolvendo a integral definida, obtém-se uma expressão analítica para calcular a área da região BGI (Eq. (7)).

$$A_{1i} = \frac{2}{3}(H_i - h_i)B_i \quad (7)$$

A área da região BDEG é dada pela Eq. (8).

$$A_{2i} = \frac{B_i + b_i}{2} \cdot h_i \quad (8)$$

Assim, a área da região BDEGI, calculada pelo Modelo III, toma a forma da Eq. (9).

$$A_{IIIi} = A_{1i} + A_{2i} = \frac{B_i(4H_i - h_i) + 3b_i h_i}{6} \quad (9)$$

O volume de cada elemento i é obtido pelo produto da área A_{IIIi} (Eq. (9)) pela respectiva espessura. Assim, o volume do silo pode ser expresso de acordo com a Eq. (10).

$$V_{III} = \sum_{i=1}^{10} \frac{B_i(4H_i - h_i) + 3b_i h_i}{6} \cdot L_i \quad (10)$$

Modelo IV: integral dupla

O método da integral dupla considera a diferença de três sólidos: o primeiro (V_{41}) é limitado na base pelo plano XY, nas faces transversais, pelos planos $y = 0$ e $y = L$, nas faces longitudinais pelos planos $x = -B/2$ e $x = B/2$ e, superiormente, por uma superfície $Z(x, y)$; o segundo e o terceiro (V_{42}) são dois prismas de base triangular BCD e EFG (Fig. 3b) e comprimento L .

Considerando-se o formato parabólico das seções transversais (plano XZ) da cobertura do silo, foi proposta a função Z da Eq. (11) para descrever a superfície da cobertura.

$$Z(x, y) = C_0 + C_1y + C_2x + C_3x^2 \quad (11)$$

Onde C_0 , C_1 , C_2 e C_3 são coeficientes reais.

O Método dos Mínimos Quadrados foi empregado para a determinação dos coeficientes. Substituindo-se as coordenadas de 55 pontos da cobertura (Tab. 1) na Eq. (11) foi obtido um sistema de 55 equações lineares, na forma da Eq. (12), cujas incógnitas (componentes do vetor \mathbf{X}) são os coeficientes da Eq. (11).

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Z} \quad (12)$$

Onde \mathbf{A} é a matriz com os coeficientes,

\mathbf{X} é o vetor dos coeficientes C_0 , C_1 , C_2 e C_3 e

\mathbf{Z} é o vetor das alturas dos pontos da cobertura do silo.

O sistema da Eq. (12) não tem solução, pois a matriz \mathbf{A} não é quadrada, é de ordem 4×55 . Porém, multiplicando-o pela esquerda, pela matriz transposta de \mathbf{A} , obtém-se um novo sistema linear (equações normais) cuja matriz dos coeficientes é quadrada (4×4) e as incógnitas são os coeficientes do vetor \mathbf{X} que se deseja determinar. Analiticamente, a solução pode ser obtida multiplicando-se ambos os lados desse novo sistema, pela matriz inversa de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Assim, obtém a equação matricial, Eq. (13).

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Z} \quad (13)$$

O volume V_{41} foi calculado por meio de uma integral dupla sobre a função $Z(x,y)$, conforme mostra a Eq.(14).

$$V_{41} = 2 \int_0^L \int_0^{B/2} (C_0 + C_1y + C_2x + C_3x^2) dx dy \quad (14)$$

Resolvendo-se a integral da Eq. (14) obtém-se uma expressão algébrica em função da base B , dos coeficientes da Eq. (11) e do comprimento do silo, dada pela Eq. (15).

$$V_{41} = \frac{L}{12} (12C_0 + 6C_1L + 3C_2B + C_3B^2) \quad (15)$$

O volume V_{42} pode ser calculado acoplando-se os dois prismas de base triangular, formando um prisma de base retangular, cujo volume é dado pela Eq. (16).

$$V_{42} = (B - b) \cdot h \cdot L. \quad (16)$$

Finalmente, o volume do silo é dado pela Eq. (17).

$$V_{IV} = V_{41} - V_{42} \quad (17)$$

Onde os volumes V_{41} e V_{42} são calculados pelas Eqs. (15) e (16), respectivamente.

Particularmente, para o silo real considerado, os coeficientes obtidos foram: $C_0 = 0,672$, $C_1 = 0,019$, $C_2 = 0$ e $C_3 = -0,0283$, com coeficiente de determinação $R^2 = 0,949$. Pela simetria do sólido em relação ao eixo Z , era de se esperar que o coeficiente C_2 fosse nulo, semelhante ao que ocorreu no Modelo III. Como as bases B e b foram

consideradas congruentes, o volume calculado pelo Método IV ficou reduzido ao volume V_{4I} dado pela Eq. (15).

Comparação dos Resultados e Análise

Uma estratégia para avaliar o resultado em cálculo de áreas e volumes é compará-los a áreas ou sólidos elementares (como retângulos e paralelepípedos). No presente estudo, os volumes dos paralelepípedos de seções transversais B'DEG' e ACFH e comprimento L , são volumes menor e maior, respectivamente, do que o volume do silo¹. Esses volumes não são modelos precisos, mas apenas estimativas, cujos resultados para o silo em estudo são apresentados na quinta e sexta colunas da Tab. 2. Comparando os resultados dos modelos com as referidas estimativas, observa-se que, de fato, os volumes dos Modelos I a IV estão entre os volumes dos paralelepípedos menor e maior, o que atribui certa credibilidade aos resultados dos modelos.

Os cálculos dos volumes do silo nos Modelos I, II e III foram executados com base nas formulações desenvolvidas nessa seção, em de uma planilha eletrônica, enquanto o Modelo IV foi implantado como um programa em SCILAB, para viabilizar a inserção dos dados na matriz A e a solução do sistema linear, dada pela Eq. (12). Ambos os algoritmos foram desenvolvidos pela equipe e calculam os volumes para diferentes medidas de b , B , h , H , L , Δy e alturas da cobertura, como as da Tab. 1. Na Tab. 2 são apresentados os resultados de cada modelo para os valores particulares do silo em estudo. Particularmente, os valores de b , B , h , H , L e Δy foram considerados constantes e $b = B$.

¹ Essa proposição é um caso particular do seguinte teorema, ensinado em Cálculo: Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$. Se m e M , números reais, forem respectivamente os valores mínimo e máximo absolutos de f naquele intervalo, então $m \leq \int_a^b f(x)dx \leq M$.

Tabela 2 - Volumes dos silos para os diferentes modelos (m^3)

Dados e estimativas						Modelos		
b	B	h	H	Mínima	Máxima	Modelos I e II	Modelo III	Modelo IV
4,24	4,24	0,56	1,09	47,49	92,43	66,74	68,51	72,74
Média							69,33	
Diferenças em relação à média						-2,59	-0,81	3,48
Desvio padrão							4,36	

Fonte: os autores

Como esperado, os volumes calculados pelos modelos se situam entre os volumes estimados. Os modelos II e III apresentaram resultados bem próximos, já que o percentual da diferença entre ambos é de 2,67%, enquanto o Modelo IV apresentou um resultado 6 % diferente do Modelo I. Essas diferenças devem-se às distintas hipóteses propostas em cada modelo. Apesar do coeficiente de correlação $R^2 = 0,949$ o ajuste dos coeficientes da função da Eq. (11) da cobertura, pode conter erros maiores do que as aproximações do ajuste da função do integrando da Eq. (4) no Método III.

Os resultados obtidos pelos quatro métodos indicam que o volume do silo, para as medidas apresentadas na Tab. 2, está entre 66 e 73 m^3 . Como o Método III tem uma avaliação mais precisa que os demais na descrição da superfície de cobertura, o volume de 68 m^3 , pode ser adotado como o mais confiável. Para fins práticos (como as demandas do produtor rural), diferenças de 5% não são significativas, ou seja, não comprometem o planejamento do armazenamento em função do número de animais a alimentar.

As formulações para o volume do silo foram deduzidas genericamente, podendo ser utilizadas para quaisquer medidas. As equações dos volumes dos Métodos I, II e III estão em função das bases e das alturas, enquanto o algoritmo do Método IV necessita das coordenadas dos pontos da cobertura. Soluções gerais exigem o uso da linguagem algébrica e, com ela, o desenvolvimento de programas

computacionais, os quais passam a ser úteis para a solução de diferentes situações com a geometria semelhante.

Segundo Vilela, forrageiras com 30 - 35% de matéria seca têm densidade 403 kg/m^3 e cada animal consome 15 kg/dia de forragem (Vilela, 1985, p.8). Com esses dados e o volume de 68 m^3 do silo analisado, para 50 animais, o alimento armazenado será suficiente para 36 dias, de acordo com a Eq. (1). As formulações desenvolvidas neste trabalho poderiam ser empregadas também para determinar as dimensões do silo, conhecidas as demandas do produtor, evidenciando a versatilidade e praticidade do modelo.

Ensino de Matemática com Modelagem

Os conceitos envolvidos nos Modelos I e II são as medidas de comprimento, área e volume de figuras elementares, além de média aritmética, ensinados no Ensino Fundamental e no Médio. A formulação das hipóteses, escolhendo áreas das seções transversais para fazer médias, constituiu-se em oportunidade para consolidar tais conceitos. Provavelmente, após a modelagem, a compreensão de áreas, volumes e média esteja diferente de antes da modelagem, reforçando a proposição de Vergnaud¹ de que os conceitos são aperfeiçoados na medida em que o aprendiz acrescenta novos sentidos a eles. A modelagem desempenha essa função na formação científica do educando: atribuir sentido aos conhecimentos matemáticos e, com isso, consolidá-los na cultura científica do estudante.

¹ Para Vergnaud, “A Conceitualização é, em primeiro lugar, um processo. Podemos falar da Conceitualização como resultado desse processo, mas antes de mais nada é um processo. Começa-se bem cedo o processo de Conceitualização, bem criança ainda e nunca jamais se termina. A gente acaba descobrindo aspectos que não tinha previsto. Só nos resta trabalhar outra vez, refletir de novo, repetir, também ser ajudado, auxiliado pelo outro.” (VERGNAUD, 2018, p.15)

As hipóteses consideradas nos Modelos I e II são independentes. A constatação de que eram equivalentes, ocorreu ao implementar as fórmulas gerais na planilha. Ao testar os modelos para diferentes tamanhos de silos, constatou-se a equivalência, e então, propôs-se o desafio de prová-la algébrica e geometricamente. A prova algébrica é elementar. Basta executar as operações algébricas da primeira parte da Eq. (3), obtendo-se a Eq. (2). A prova geométrica demandou a adaptação de uma proposição da média aritmética à linguagem geométrica, a fim de se obter a mesma seção transversal para ambas as hipóteses. Observa-se, nesse procedimento, que foi necessário deslocar o foco na modelagem, por algum tempo, para envolver-se em uma investigação de interesse exclusivamente matemático.

Os conceitos de função quadrática e integral definida estão presentes no Modelo III, além daqueles de geometria presentes nos Modelos I e II. Nos problemas de livros de cálculo integral, os coeficientes das funções são conhecidos. Nos problemas de modelagem isso não ocorre, constituindo-se em uma dificuldade e oportunidade de investigação. Anderson e Bruna foram orientados a resolver esse problema mediante o ajuste de parâmetros de curvas polinomiais (ajuste linear), das quais são conhecidos alguns pontos. A aplicação do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) ficou trabalhosa, pois os componentes Álgebra Linear e Cálculo Numérico ainda não haviam sido cursados. A leitura de uma apostila sobre o método foi proposta, mas mostrou-se um estudo muito complexo para o momento. Assim, a solução foi utilizar uma planilha eletrônica para a determinação dos parâmetros, que inseridos nas funções dos integrandos, viabilizou o cálculo das áreas das seções transversais de cada seção. No item 3.3 desse trabalho, no entanto, preferimos apresentar outra maneira de obter os parâmetros, já que o número de pontos disponíveis em cada curva eram apenas três, considerada a simetria da parábola. Assim, foram envolvidos apenas conteúdos do Ensino Fundamental e Médio (simetria, intersecção com o eixo vertical e raízes), reduzindo a complexidade da determinação de parâmetros, para uma abordagem interpretativa de propriedades já

conhecidas de funções. Nessa alternativa de relato, foi apresentada uma possibilidade não executada durante a modelagem, mas retomada em momento posterior e discutida entre a dupla e o professor. A elaboração de possibilidades está no escopo do pensamento de Skovsmose, de analisar, como objeto da Educação Matemática, não somente o que ocorreu de fato, mas também o que poderia ter ocorrido, considerando que qualquer detalhe ação poderia ter desencadeado outros desfechos.

Assim, esse autor propõe a pesquisa de possibilidades: “Essa pesquisa inclui não somente um estudo de “o que é” ou “o que é construído”, mas também um estudo de “o que não é” e “o que poderia ser construído”. (SKOVSMOSE, 2015, p. 70).

A solução do Modelo III inspirou o uso da simetria em relação ao plano YZ e a proposição da função da Eq. (11). O Modelo IV foi proposto pela dupla Anderson e Bruna em Cálculo C. Eles calcularam o volume do sólido limitado pela cobertura curva através de uma integral dupla, objeto de estudo daquele componente curricular. Determinaram os parâmetros da função $Z(x,y)$ pelo MMQ. A elaboração de um programa computacional para o MMQ não foi uma tarefa simples para a dupla, mas com alguma ajuda, foi desafiante.

Considerações Finais

A experiência de modelar um problema real pela primeira vez, passa necessariamente por uma fase inicial de ansiedade, insegurança e desconfiança se o tema é adequado, ou se o conhecimento dominado pelos alunos é suficiente para resolver o problema. Isso ocorreu na modelagem da Bruna e do Anderson, assim como nas experiências de seus colegas. Cada passo, desde a escolha do tema, a determinação dos métodos de medida e de cálculo, a elaboração de programas e o estudo de conceitos ainda desconhecidos, impôs entraves e dificuldades, superados com o estudo e a dedicação. Tais dificuldades e desafios são próprios do processo de modelar, visto que se trata de uma investigação.

No sentido de contribuir para a discussão das potencialidades da modelagem como estratégia de ensino, cabe ainda destacar, ao menos, três características da experiência relatada:

- i) *A contextualização do conhecimento matemático*: o estudo das propriedades dos conceitos em classe, geralmente, ocorre por um enunciado, a explicitação de exemplos e a demonstração. O foco dessa abordagem é a coerência das proposições, ou seja, a argumentação sobre a veracidade das proposições. Na modelagem, por sua vez, admite-se que as proposições são verdadeiras e podem ser empregadas para resolver os problemas. Dessa forma, o aluno outorga outros significados aos conceitos matemáticos, incrementando a compreensão e atribuindo finalidades externas a eles. Evidentemente, os aspectos formais não são negados, pelo contrário, a veracidade das proposições é uma condição para que elas sejam empregadas nos modelos;
- ii) *A descompartmentalização do conhecimento matemático*: o emprego de conteúdos de diferentes níveis de ensino (áreas, volumes, função polinomial, integrais simples, duplas e ajuste de parâmetros) e áreas da Matemática (geometria, álgebra e análise) no mesmo problema é comum na Modelagem. Esse tipo de experiência destoa da ordenação de tópicos da abordagem purista do ensino, que vai do supostamente mais simples para o mais complexo. Na modelagem os conceitos são requisitados quando e onde necessários. Ou seja, é o problema a ser resolvido que determina a ordem de estudo dos conceitos e não a estrutura desses. Dessa forma, assim como ocorreu na experiência relatada, partes de vários conceitos foram requisitadas e associadas, evidenciando conexões raramente mencionadas no ensino formal sequencial;
- iii) *O estudo instrumental de conceitos*: durante o processo de modelagem, nem sempre ocorre uma compreensão profunda

dos conceitos. Para utilizá-los, em muitos casos, basta entender o sentido do conceito e alguns elementos de sua formulação. É o que ocorre no trabalho de usuários da Matemática, tais como engenheiros, agrônomos e economistas, por exemplo, que se valem de fórmulas, algoritmos e softwares para resolver problemas de suas áreas, sem preocuparem-se com as deduções e justificativas próprias da matemática. De certa forma, foi o que ocorreu nos Modelos III e IV, quando se fez necessário o MMQ. A explicação do professor sobre o método e algumas instruções sobre o uso de planilhas foram suficientes para entender o significado de ajuste de curvas. Evidentemente, os alunos não dominaram o tema a partir da modelagem, mas ficaram conhecedores da sua existência, potencialidade e até conseguiram obter resultados, mesmo que pelo uso da planilha. Em Cálculo Numérico, eles aperfeiçoarão a compreensão iniciada instrumentalmente na modelagem, deduzindo algoritmos e demonstrando a otimização dos parâmetros, para o caso dos ajustes lineares.

Recorrendo novamente a Vergnaud, os conceitos são formados ao longo do tempo, com a atribuição de diferentes significações e representações simbólicas. Nesse sentido, quanto mais diversificadas forem as experiências vivenciadas pelos alunos, maiores serão as chances de aprofundar os conceitos. Talvez seja essa, uma das principais contribuições da modelagem, como recurso para o ensino da Matemática.

REFERÊNCIAS

MIRANDA, João Eustáquio Cabral; RESENDE, Umberto; VALENTE, José de Oliveira. Ensilagem do milho e do sorgo. **Comunicado técnico**. Juiz de Fora, Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento, n. 28, p. 1-4, 2002.

VILELA, Duarte. **Silos**: tipos e dimensionamentos. Coronel Pacheco, MG: Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária, EMBRAPA - CNPGL. 22. Centro Nacional de Pesquisa de Gado de Leite. 31p. 1985.

VERGNAUD, Gérard. Conceitualização e Simbolização. *In*: III Colóquio Internacional sobre a Teoria dos Campos Conceituais, 3, Brasília. **Anais** [...]. Brasília: DF, Universidade Católica de Brasília, 2018, p. 1-13.

Uma Experiência de Ensino do Cálculo Diferencial e Integral a Partir da Modelagem Matemática de Circuitos Elétricos

*Flavio Fernandes*¹

*Rafael Silva Pippi*²

*Vitor José Petry*³

Introdução

Este trabalho foi desenvolvido a partir de uma experiência de aplicação da Modelagem Matemática em um curso de Engenharia de Controle e Automação em uma instituição de Ensino Público do Oeste Catarinense. A aplicação se deu com alunos do componente curricular de Cálculo 1 em uma atividade interdisciplinar com os componentes curriculares de Física e Circuitos Elétricos. O intuito do trabalho foi propor atividades de modelagem ao estabelecer relações interdisciplinares para o estudo de funções envolvendo as relações entre tensão elétrica e corrente elétrica em circuitos utilizando materiais com comportamentos ôhmicos e não ôhmicos. Foram abordados conceitos relacionados a funções, limites, derivadas e integrais.

¹ Mestre em Matemática, IFSC. *E-mail*: flavio.fernandes@ifsc.edu.br

² Doutor em Engenharia Elétrica, IFSC. *E-mail*: pippi@ifsc.edu.br

³ Doutor em Matemática, UFFS. *E-mail*: vitor.petry@uffs.edu.br

O componente curricular em que se desenvolveu boa parte do trabalho (Cálculo 1) possui uma carga horária total de 120 horas e sua programação contempla uma abordagem de revisão e aprofundamento de conceitos associados a funções reais de uma variável real e, posteriormente, o estudo de limites, derivadas e integrais de funções de uma variável real. Foram desenvolvidos experimentos no Laboratório de Circuitos Elétricos sob a orientação dos professores participantes da pesquisa. O objetivo desta etapa foi obter dados experimentais que estabelecem relações entre as grandezas envolvidas de modo a construir modelos que permitissem trabalhar os conteúdos abordados no Cálculo Diferencial e Integral. Nesses experimentos, foram utilizados multímetros para o auxílio nas medidas de corrente elétrica a partir da tensão aplicada em resistores, como lâmpadas incandescentes halógenas e diodos. Os experimentos foram feitos pelos alunos a partir de um roteiro previamente definido pelos professores e, em seguida, os dados foram tabulados para posterior elaboração/definição dos modelos matemáticos e abordagem dos conceitos relacionados.

Após os experimentos, ao estabelecer funções para representar cada sequência de dados experimentais, tornou-se possível a retomada de conceitos referentes aos conteúdos associados a funções (domínio, contradomínio, imagem, composição de função, função inversa, função afim, funções polinomiais, função exponencial, função logarítmica). Estabeleceram-se, dessa forma, os modelos iniciais para descrever cada experimento e, a partir desses modelos, os conceitos inerentes ao estudo do cálculo diferencial e integral foram trabalhados, permitindo atribuir significados a cada um desses conceitos. Em diversos momentos ao longo das aulas, foi necessário extrapolar elementos emergidos na modelagem para fazer generalizações, formalizações de conceitos e estabelecer técnicas para o cálculo dos limites, das derivadas e das integrais. Essa necessidade decorre da compreensão de que, ao trabalhar com a Modelagem Matemática, são importantes os momentos de formalização de conceitos que surgem no processo de pesquisa, não sendo necessariamente suficiente discutir apenas os elementos que se evidenciam no modelo explorado.

Além da proposição dos modelos, nesta pesquisa buscou-se identificar aspectos que evidenciam contribuições do trabalho com Modelagem Matemática no ensino de cálculo diferencial e integral, na tentativa de atribuir um melhor significado aos conceitos estudados pelos alunos.

Fundamentação Teórica

Para fundamentar as discussões abordadas neste trabalho, são apresentados, em linhas gerais, os pressupostos teóricos que norteiam esta pesquisa no que se refere a ensino tecnológico, Modelagem Matemática, teoria da aprendizagem significativa e interdisciplinaridade. Esses elementos são indispensáveis para uma melhor compreensão do processo de modelação, da observação, da coleta de dados e em especial, na análise dos dados da pesquisa. Aspectos teóricos acerca das funções matemáticas e dos conceitos da Física presentes nos experimentos serão expostos durante a apresentação e análise dos resultados.

Inicialmente, contextualiza-se que este trabalho é desenvolvido em uma Instituição Pública Federal que oferece Educação Profissional Técnica e Tecnológica. De acordo com Durães (2009), um dos aspectos de diferenciação da educação profissional tecnológica e da educação profissional técnica é o fato de a primeira estar associada ao ensino de nível de graduação e pós-graduação enquanto a segunda, ao Ensino Básico. Destaca-se ainda que, nessa perspectiva, a concepção de ensino tecnológico de que trata este trabalho não é exclusivamente focada no saber fazer, mas também no saber por que fazer, mesmo que historicamente as origens da educação técnica e tecnológica estejam associadas à formação de mão de obra operacional para a indústria. Exemplos dessa origem histórica são as primeiras escolas de tecnologia da França, no século XVII: Academia Real de Arquitetura e Escola de Pontes e Estradas e Escola de Minas, de acordo com Bazzo (2016). Embora a educação tecnológica vise também atender ao mercado de trabalho, Durães (2009) alerta sobre a necessidade de uma

formação que possibilite quebrar engessamentos trazidos por essa trajetória histórica.

Historicamente, observam-se alterações nas diretrizes para a educação tecnológica que, em alguns momentos, exaltam a importância do ensino associado à prática profissional, ora enfatizam o aprofundamento teórico dos objetos de estudo e em outros momentos dão ênfase a que o ensino evite a formação de profissionais acríticos e reprodutores de processos mecânicos de produção. É notório que qualquer posição extremista do professor na defesa de um desses aspectos dificulta a produção do conhecimento de forma mais completa e abrangente. O diálogo entre teoria e prática e a reflexão crítica daquilo que é produzido com o conhecimento acadêmico torna-se, dessa forma, norteador da práxis educacional em cursos superiores. Diante desse pressuposto, emerge a reflexão sobre os métodos de ensino abordados na prática educacional tecnológica, bem como sua eficácia no processo de formação dos alunos. Nesse sentido, muitas críticas ao sistema de ensino técnico são veiculadas por diversos meios, enfatizando, segundo Bazzo, uma “tímida participação dos resultados na solução dos problemas que se põem na sociedade” (2016, p. 16).

Altos índices de desistências e reprovações nos cursos de Engenharia, especialmente nos primeiros semestres, também impulsionam professores na busca por alternativas e soluções visando a permanência dos alunos nos cursos superiores e que diminuam as reprovações, principalmente nos componentes curriculares de áreas consideradas de exatas. As dificuldades apresentadas em relação a conteúdos de Matemática Básica têm sido apontadas por muitos professores como justificativa para os elevados índices de reprovação e de desistência. A dissociação entre teoria e aplicação de propriedades matemáticas ensinadas também é um fator que motiva os alunos a não aguçarem sua curiosidade em aprofundar conceitos, acarretando desmotivação e não aprendizado.

Identificar motivos para dificuldades encontradas por parte dos alunos em cursos de Engenharia é importante, mas não o bastante para

solucionar problemas de aprendizagem. É imprescindível adoção de estratégias e propostas de ensino que motivem os alunos a superar as suas próprias dificuldades na busca por soluções para os problemas e desafios com que se deparam. Assim, a percepção das carências e da necessidade de conhecimentos teóricos no campo da Matemática ocorre a partir da intenção de resolver algum problema relacionado à sua área do conhecimento e não pela imposição dos professores, coordenadores ou colegas. Esse processo de autopercepção das carências e das necessidades é imprescindível para que o aluno busque motivo para agir na construção do seu próprio conhecimento.

A estratégia de utilização de Modelagem Matemática presente neste trabalho traz um aspecto motivador, visando evidenciar o processo de construção de algumas funções aplicadas na Física e em circuitos elétricos para despertar nos alunos o interesse para o estudo de conceitos relacionados ao Cálculo. A Modelagem Matemática é apresentada como sendo “a arte de expressar situações-problema do nosso cotidiano por meio da linguagem matemática” (BIEMBENGUT, 2016). Uma das grandes vantagens da Modelagem Matemática é que ela pode ser aplicada em qualquer área do conhecimento que exija formulação numérica de dados:

A habilidade de empregar matemática em situações concretas e em outras áreas do conhecimento humano consiste em tomar um problema prático relativamente complexo, transformá-lo em um modelo matemático, ou seja, traduzir a questão na linguagem de números, gráficos, tabelas, equações etc., e procurar uma solução que possa ser reinterpretada em termos da situação concreta original (BASSANEZI, 2015, p. 10).

Essa característica que a Modelagem Matemática apresenta abre um amplo leque de aplicações quando se dispõe de ferramentas de mensuração apropriadas que permitam uma melhor visualização dos fenômenos observados. A disponibilidade de diferentes instrumentos de medidas e a possibilidade de montagem de laboratórios apropriados permitem explorar cada vez mais essa

ferramenta de ensino dentro das instituições educacionais. Nesse contexto, quanto mais conhecimento matemático estiver disponível para ser empregado na elaboração dos modelos, melhores são as potencialidades de obter boa aproximação da realidade a ser descrita pelo modelo.

Na tentativa de descrever os processos de modelagem, são definidas algumas etapas que a caracterizam. Para Biembengut (2016), ao se deparar com uma situação real que exija um ferramental matemático que a represente, está-se diante da primeira etapa da Modelagem Matemática: *a Interação*. Neste momento, torna-se importante o reconhecimento da situação-problema e a familiarização com o assunto a ser modelado mediante a compreensão teórica dos elementos pertencentes à situação que está sendo investigada. Ao formular o problema, a partir de hipóteses identificadas na etapa de interação, e buscar a resolução desse problema em termos de modelos, chega-se a segunda etapa da Modelagem Matemática: *a Matemáticação*. Nesta etapa, são classificadas as informações relevantes e não relevantes, decide-se quais os fatores a serem perseguidos, selecionam-se as variáveis relevantes e constantes envolvidas, definem-se símbolos apropriados para essas variáveis e descrevem-se as relações em termos matemáticos. A terceira e última etapa da Modelagem Matemática apresentada por Biembengut (2016) é denominada *Modelo Matemático* e consiste na interpretação da solução e validação do modelo pela avaliação dos resultados obtidos. Nesta última, interpreta-se o modelo quanto às implicações da solução, verifica-se a sua adequabilidade e avalia-se quão significativa e relevante é a solução. Bassanezi (2015) e Almeida *et al.* (2016) apresentam as mesmas etapas da Modelagem Matemática, porém, denominam esta última etapa como *Interpretação de Resultados e Validação*.

Biembengut assim resume a ideia de Modelagem Matemática aqui explicitada: “A Modelagem Matemática é, assim, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas em

uma solução particular, mas que também sirvam posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias” (2016, p. 13).

Defensores do uso da Modelagem Matemática na sala de aula, dentre os quais Biembergut (2016) e Almeida *et al.* (2016), identificam diversos elementos dessa metodologia como contribuições para a aprendizagem, como: contextualização dos conceitos de Matemática; motivação para a compreensão de métodos e teorias; apreensão dos conceitos estudados; habilidade de resolver problemas; capacidade de trabalhar em grupo; desenvolvimento da criatividade; interação dos alunos; desejo de aprender a partir da curiosidade proporcionada pelos problemas; capacidade de utilização de computadores e calculadoras; produção de conhecimento matemático; desenvolvimento de raciocínio lógico; análise e interpretação crítica de resultados (reflexão sobre modelos e suas implicações em contextos aplicáveis e não aplicáveis) e aproximação de outras áreas do conhecimento com a Matemática.

O objetivo principal de um processo de ensino é promover uma aprendizagem consistente e duradoura, sendo esse um dos aspectos perceptíveis na Modelagem Matemática e que está relacionada à *teoria da aprendizagem significativa*, atribuída a David Ausubel. Essa teoria é pautada essencialmente na ideia de que os conhecimentos prévios (subsunçores) são pressupostos básicos (não exclusivos) para qualquer novo aprendizado. Moreira define os conhecimentos prévios como uma “estrutura cognitiva” presente nos estudantes, mas, “para que a estrutura cognitiva preexistente influencie e facilite a aprendizagem subsequente [, adverte] é preciso que seu conteúdo tenha sido aprendido de forma significativa” (2006, p. 13). Para Moreira, a condição para a existência de um aprendizado significativo é que “o material a ser aprendido seja relacionável (ou incorporável) à estrutura cognitiva do aprendiz, de maneira não arbitrária e não literal”.

Quanto à natureza do material, ele deve ser “logicamente significativo” ou ter “significado lógico”, isto é, ser suficientemente não arbitrário e não aleatório, de modo que possa

ser relacionado, de forma substantiva e não arbitrária, a ideias, correspondentemente relevantes à natureza da estrutura cognitiva do aprendiz, nela devem estar disponíveis os conceitos subsunçores **específicos**, com os quais o novo material é relacionável (MOREIRA, 2006, p. 19, grifo do autor).

Nessa perspectiva, é importante destacar o papel do aprendiz como aquele que manifesta disposição para relacionar de maneira substantiva, porém, não arbitrária, o novo material potencialmente significativo de modo a incorporá-lo junto à sua estrutura cognitiva pré-existente. Essa relação material/aprendiz – aprendiz/material torna-se elemento-chave para a efetivação da aprendizagem significativa, pois, de acordo com a teoria da aprendizagem significativa, um material precisa ter significado lógico e psicológico. O significado lógico está direcionado especialmente ao potencial do material em si, pela sua capacidade de apresentar elementos de maneira significativa e não literal que estejam “situados no domínio da capacidade intelectual humana”. O significado psicológico é idiossincrático (peculiar a cada indivíduo) e está associado à relação estabelecida entre o material lógico e a estrutura cognitiva do aprendiz. Ao encontrar caminhos associativos entre o material lógico e os subsunçores presentes no indivíduo, o produto desse processo torna-se um novo aprendizado significativo. Ausubel cita um exemplo que está diretamente associado ao que será abordado neste trabalho:

Um estudante pode aprender a lei de Ohm, a qual indica que, num circuito, a corrente é diretamente proporcional à voltagem. Entretanto, essa proposição não será aprendida de **maneira significativa a menos que** o estudante já tenha adquirido, previamente, os significados dos conceitos de corrente, voltagem, resistência, proporcionalidade direta e inversa (satisfeitas estas condições, a proposição é potencialmente significativa, pois seu significado lógico é evidente), e **a menos que tente** relacionar estes significados como estão indicados na Lei de Ohm (apud Moreira, 2006, p. 21, grifos do autor).

Ao se deparar com um problema real, eventualmente faltem ao estudante, conhecimentos que podem ser relevantes para a sua solução. Dessa forma, não apenas os conhecimentos prévios são suficientes para a aprendizagem significativa, mas também a capacidade de pesquisa e busca de novos subsunçores que auxiliem na compreensão de métodos para a resolução do problema proposto.

As relações interdisciplinares – até então subentendidas no texto – evidenciam a tentativa de fugir da fragmentação do conhecimento. Essa fragmentação ocorre pela própria organização atual do ensino superior que separa o estudo em áreas do conhecimento que visem contribuir na formação específica de cada curso. Trindade considera que o ensino não pode ficar aprisionado a esse modelo fragmentado e aponta a interdisciplinaridade como alternativa.

Especializado, restrito e fragmentado, o conhecimento passou a ser disciplinado e segregador. Estabeleceu e delimitou as fronteiras entre as disciplinas, para depois fiscalizá-las e criar obstáculos aos que as tentassem transpor [...]. Criou um pássaro, deu-lhe asas potentes, mas que só alça vôo no campo restrito da sua especialidade – trancou-o em uma gaiola (2008, p. 68).

Neste trabalho, percebe-se frequentemente a preocupação em apresentar aspectos conceituais que ora são estudados em Cálculo I ou até mesmo em componentes curriculares de Matemática Básica, ora são estudados em Física ou Eletricidade. Porém, o experimento estudado é unitário e não fragmentado, ou seja, carrega em si mesmo relações numéricas e conceituais do próprio fenômeno pesquisado e não de áreas “separadas” do conhecimento. O diálogo entre os professores envolvidos nas atividades interdisciplinares e a observação das descobertas obtidas no processo de ensino qualifica o trabalho e favorece o aprendizado. A interdisciplinaridade não é apenas uma relação entre diferentes componentes curriculares.

Partindo da premissa de que a interdisciplinaridade parte muito mais da interação entre as pessoas do que entre os conteúdos das disciplinas, se não há espaço para o diálogo, a interação entre as pessoas não encontrará espaço para ser exercida. Deste modo, o ensino da matemática tal como o descrevemos está longe dos princípios da interdisciplinaridade: humildade, espera, respeito, coerência e desapego. Especialmente aos professores é necessário humildade para entenderem que estão tecendo juntos com os alunos uma rede de significados e que a contribuição do outro é fundamental. [...] Há que se ter clareza da proposta para haver coerência entre o falar e o agir. Ter desapego por "sua disciplina", visando tecer esta rede a muitas mãos, exercitando a construção de uma rede rica em significados. Estes são os pressupostos desta nova atitude da qual a interdisciplinaridade é sua precursora (ALVES, 2008).

A interdisciplinaridade pode ser o caminho capaz de reunir diferentes saberes para um aprendizado mais abrangente. Nesse sentido, os professores devem moldar-se a essa forma de ensinar e aprender. Trindade traz uma interpretação para a definição de interdisciplinaridade que vem ao encontro de tudo o que foi escrito até então:

Interdisciplinaridade é palavra nova que expressa antigas reivindicações e delas nascida. Para alguns, surgiu da necessidade de reunificar o conhecimento; para outros, como um fenômeno capaz de corrigir os problemas procedentes dessa fragmentação; outros ainda a consideram uma prática pedagógica (2008, p.72-73).

Independentemente da postura quanto à definição adotada de interdisciplinaridade, é perceptível a sua importância no processo de ensino e aprendizagem em qualquer nível de ensino. Sua valorização está presente no desenvolvimento deste trabalho e enriquece ainda mais os resultados obtidos.

Metodologia

O trabalho foi desenvolvido com uma turma de Cálculo 1 do primeiro semestre do curso de Engenharia de Controle e Automação. Divididos em grupos de cinco indivíduos, os alunos realizaram três experimentos em laboratório para obter dados numéricos provenientes de situações reais com a finalidade de abordar conceitos relativos a funções associadas ao estudo de eletricidade. Foram elaborados materiais didáticos e roteiros para a realização dos experimentos e a coleta dos dados experimentais com a finalidade de orientar os alunos e mediar o processo de construção dos modelos matemáticos, mantendo, porém, certa autonomia dos grupos na execução dos experimentos e na resolução dos problemas propostos estrategicamente para o processo de modelagem.

As atividades foram desenvolvidas em três etapas: 1ª etapa – orientações técnicas no Laboratório de Eletricidade, realização dos experimentos e coleta de dados; 2ª etapa – atividade no Laboratório de Informática com orientações para a obtenção dos modelos matemáticos a partir dos dados experimentais tabelados em planilha eletrônica. Alguns desses modelos foram desenvolvidos em sala de aula e os demais como atividades extraclasse com trabalhos em grupos; 3ª etapa – utilização dos modelos desenvolvidos para o estudo de conceitos abordados no Cálculo Diferencial e Integral. Destaca-se que a elaboração dos materiais e dos roteiros se deu a partir de ensaios prévios dos experimentos.

Apesar da obtenção de dados numéricos resultantes dos experimentos realizados, estes não foram submetidos a tratamentos estatísticos, visto não serem objeto da análise deste trabalho. Os dados experimentais serviram apenas para fins didáticos, visando à elaboração de modelos matemáticos para o estudo de funções e para estabelecer significados referentes a conceitos abordados no Cálculo Diferencial e Integral. Considerando que nesta pesquisa propôs-se a elaboração de modelos matemáticos a partir do desenvolvimento de atividades interdisciplinares com a finalidade de identificar elementos

que evidenciem uma aprendizagem significativa, sua análise tem caráter qualitativo.

Ao longo da execução de todas as atividades, foram efetuados registros em diário de bordo com os principais pontos de questionamentos, dificuldades e elementos que caracterizaram o aprendizado dos alunos. Registros através da coleta de materiais produzidos pelos alunos também foram instrumentos de produção de dados usados nesta pesquisa. Uma breve análise é desenvolvida, considerando, como principais categorias, aspectos relativos à motivação, aspectos que evidenciam a aprendizagem, evidências da importância do trabalho interdisciplinar e algumas restrições (dificuldades) encontradas no processo.

Para a apresentação e discussão das atividades desenvolvidas, considera-se um corpus com os dados de dois grupos, denominados como Grupo 1 e Grupo 2. Os materiais produzidos pelos demais são bastante similares.

Desenvolvimento

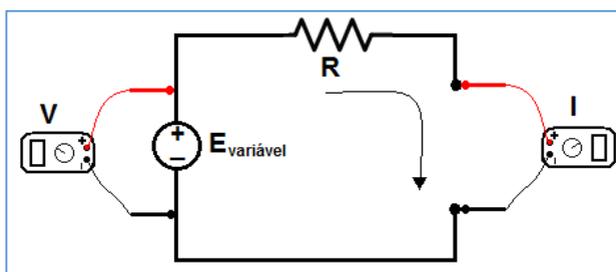
A aplicação deste trabalho iniciou com a coleta de dados no Laboratório de Circuitos Elétricos. Nos experimentos, os alunos estabeleceram sete relações em que foram associados valores da diferença de potencial, também conhecida como tensão, cuja unidade de medida é o Volt (V), com os respectivos valores da intensidade de corrente elétrica (I), cuja unidade de medida é o Ampère (A), obtidos a partir de três experimentos.

No primeiro experimento, foi verificada a corrente elétrica produzida com diferentes tensões em circuitos com resistores ($R_1 = 560\Omega$ e $R_2 = 680\Omega$), verificando-se a 1ª lei de Ohm, como mostra o esquema da Figura 1.

De forma semelhante à experiência prática que levou à formulação da 1ª Lei de Ohm, utilizaram-se, em um segundo momento, lâmpadas incandescentes de 12V e 24V em corrente

continua substituindo o resistor. Devido à interação entre resistência elétrica e aquecimento do filamento, um comportamento não ôhmico pôde ser observado.

Figura 1 - Esquema do experimento implementado para medição de corrente elétrica a partir da variação da tensão E na fonte



Fonte: os autores

Cada grupo coletou os dados utilizando os mesmos resistores e a mesma lâmpada, obtendo os valores apresentados no Quadro 1.

Quadro 1 - Relação entre valores de $V \times I$ em resistores com comportamento ôhmico apresentados pelos Grupos 1 e 2

Resistência 560 Ω		Resistência 680 Ω		Resistência 560 Ω		Resistência 560 Ω	
Tensão (V)	Corrente (A)						
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,0015	1	0,0013	1	0,0016	1	0,0012
2	0,0034	2	0,0027	2	0,0034	2	0,0028
3	0,0052	3	0,0041	3	0,0052	3	0,0043
4	0,0070	4	0,0057	4	0,0070	4	0,0058
5	0,0086	5	0,0072	5	0,0089	5	0,0074
6	0,0104	6	0,0087	6	0,0108	6	0,0089
7	0,0123	7	0,0101	7	0,0126	7	0,0105
8	0,0140	8	0,0115	8	0,0144	8	0,0118
9	0,0159	9	0,0131	9	0,0162	9	0,0135
10	0,0177	10	0,0145	10	0,0180	10	0,0150

Fonte: os autores

A partir dos dados obtidos nos experimentos, os alunos foram orientados a determinarem funções visando aproximá-los, considerando a tensão (V) como variável independente e a intensidades da corrente (I) como variável dependente. Para os dois primeiros experimentos, com valores representativos no Quadro 1, o modelo de maior aproximação, de acordo com suas conclusões, foi a representação por uma função afim. As aproximações foram feitas pelo método dos mínimos quadrados usando planilhas eletrônicas (Excel e/ou Calc). As leis de formação para as funções obtidas para os dois primeiros experimentos, para o Grupo 1 e o Grupo 2, são apresentadas nas equações (01) e (02), respectivamente:

$$I_1(x) = 0,0018x - 0,0002 \quad (01)$$

$$I_2(x) = 0,0015x - 0,0002 \quad (02)$$

onde x denota a tensão medida em Volts (V) enquanto I_1 e I_2 a intensidade da corrente medida em Ampères (A) nos respectivos experimentos. Foi definido também o domínio e a imagem das funções, limitados pelos valores obtidos no Quadro 1. Observou-se que, embora as funções apresentadas sejam funções afins (que possuem domínio e imagem reais), numa aplicação prática cada componente elétrico (resistor, lâmpada, capacitor) possui um limite físico de dissipação de potência em Watt (W), apresentado em catálogos, manuais de aplicação ou em tabelas que determinam faixas de valores comerciais. Como exemplo, citam-se resistores com vários valores comerciais de resistência cuja potência nominal máxima de operação pode ser estipulada como de $1/8W$, $1/4W$, $1/2W$. Assim, quando utilizados em um circuito elétrico, estes podem admitir uma ampla faixa de valores de tensão e corrente, desde que a potência dissipada $P=V.I$ não ultrapasse o seu valor estipulado.

Observa-se que, apesar de ocorrerem pequenas variações nos valores, comparando-se os dados do Grupo 1 e do Grupo 2 para cada

resistor, essa variação não ocasionou mudança nos modelos apresentados pelos alunos devido aos arredondamentos das constantes estarem determinados em 4 casas decimais. Observa-se ainda que, de acordo com a 1ª lei de Ohm, nos resistores ôhmicos a intensidade da corrente e a tensão são diretamente proporcionais e, de acordo com o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, podem ser representados por uma função linear, ou seja, $I(x) = ax$. Surge então uma discussão acerca do coeficiente linear nas funções aproximadas. Observa-se que em ambos os casos o valor desse coeficiente está na ordem de 10^{-4} , sendo que surgem algumas hipóteses para que esse valor não se tenha anulado. Dentre as hipóteses consideradas plausíveis, destaca-se a possibilidade de erros de medidas, comuns nesse tipo de experimento, visto a pequenas variações frequentemente não serem captadas pela (im)precisão dos aparelhos, a possibilidade de os resistores terem seu valor de resistência levemente diferente do valor comercial estipulado (faixa de tolerância) e, por último, a possibilidade de ocorrência de erro de arredondamento.

Após essas discussões, optou-se pela simplificação dos modelos anteriores, desprezando nestes o coeficiente linear e obtendo, assim, as funções apresentadas, respectivamente, nas equações (03) e (04):

$$I_1(x) = 0,0018x \quad (03)$$

$$I_2(x) = 0,0015x \quad (04)$$

com a intensidades das correntes I_1 e I_2 medidas em Ampères. Nesses novos modelos, foi identificada a relação denominada por condutância elétrica que é uma propriedade que um corpo apresenta relativa à passagem da corrente elétrica. Ela é o inverso da grandeza resistência elétrica, que denota a dificuldade oferecida à passagem de uma corrente elétrica.

Para o experimento seguinte, o resistor é substituído por lâmpadas de 12V e 24V nominais em corrente contínua com a especificação de 10W de dissipação máxima. Dessa forma, os efeitos variantes da resistência elétrica em relação à temperatura do filamento podem ser observados no decorrer das medidas. O Grupo 1 utilizou uma lâmpada de 24V enquanto o Grupo 2 utilizou uma de 12V.

Nesse experimento os grupos apresentaram algumas dificuldades em registrar a corrente elétrica, principalmente para as tensões menores. Esse fato ocorreu devido à faixa limite de resolução do multímetro utilizado estar na mesma ordem de grandeza da corrente medida. Foi solicitado que cada grupo estabelecesse alguma estratégia para obter a leitura de forma mais precisa possível. Um grupo, por exemplo, optou por identificar as oscilações máxima e mínima em várias medições para obter uma média para fazer o registro dos valores. Embora ambas as lâmpadas tivessem o mesmo princípio de funcionamento, como suas características eram diferentes, os valores obtidos pelo Grupo 1 são bem diferentes em relação ao Grupo 2, conforme verifica-se no Quadro 2. Considerando a finalidade da obtenção dos dados, não foi discutido o mérito de cada uma das estratégias, sugerindo-se que cada grupo trabalhasse com os dados obtidos em suas leituras.

Com os valores obtidos nesse experimento, os grupos foram convidados a estabelecer os modelos, visando aproximar os dados experimentais apresentados no Quadro 2. Após vários ensaios e testes com diferentes formas de representação funcional, o Grupo 1 optou por um modelo, usando uma aproximação polinomial de sexto grau, com a lei de formação dada pela Equação (05):

$$I_3(x) = -10^{-8}x^6 + 10^{-6}x^5 - 4 \cdot 10^{-5}x^4 + 0,0007x^3 - 0,0069x^2 + 0,0427x + 0,0028 \quad (05)$$

enquanto o Grupo 2 optou pelo modelo com função logarítmica, com lei de formação, conforme a Equação (6):

$$I_3(x) = 0,2193 \ln(x) - 0,00363. \quad (06)$$

Quadro 2 - Relação V x I em uma lâmpada – Grupos 1 e 2

Grupo 1		Grupo 2	
Lâmpada 24V		Lâmpada 12V	
Tensão (V)	Corrente (A)	Tensão (V)	Corrente (A)
0	0	0	0
1	0,045	1	0,016
2	0,066	2	0,095
3	0,084	3	0,200
4	0,099	4	0,250
5	0,112	5	0,282
6	0,125	6	0,337
7	0,137	7	0,352
8	0,148	8	0,401
9	0,159	9	0,440
10	0,169	10	0,491
11	0,179	11	0,526
12	0,189	12	0,558
14	0,208	-	-
16	0,240	-	-
18	0,255	-	-
20	0,269	-	-
24	0,282	-	-

Fonte: os autores

Em ambos os casos, o domínio e a imagem foram definidos de acordo com os intervalos em que os dados foram obtidos. Na tentativa

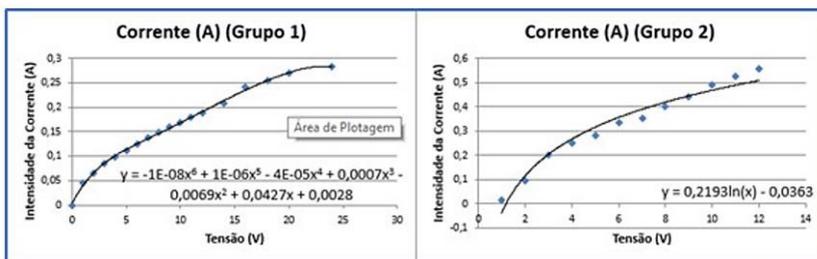
de aproximação por função logarítmica, observou-se a necessidade de exclusão do ponto de abscissa nula, visto que o logaritmo está definido apenas para valores reais positivos. Os valores experimentais, juntamente com as curvas obtidas pelos modelos são apresentados na Figura 2.

Na sequência, foi sugerido aos alunos o cálculo do valor da condutância elétrica referente aos experimentos realizados. O objetivo da atividade foi observar com os alunos que a condutância pode ser obtida a partir da derivada de cada uma das funções.

A condutância elétrica G é dada por $G = \frac{1}{R}$, onde G é a condutância elétrica medida em Siemens (Ω^{-1} ou S) e R a resistência.

Assim, para resistores ôhmicos a condutância é diretamente proporcional à corrente elétrica e inversamente proporcional à tensão elétrica. Reescrevendo, tem-se que $I = G \cdot V$ e, comparando-se com os modelos obtidos, as constantes $0,0018 \Omega^{-1}$ e $0,0015 \Omega^{-1}$ são, respectivamente, as condutâncias elétricas de I_1 e I_2 dos elementos resistivos de 560Ω e 680Ω . Os valores da condutância apresentados pelo fabricante foram, respectivamente, $0,0017857 \Omega^{-1}$ e $0,0014705 \Omega^{-1}$; portanto, com uma aproximação da ordem de 10^{-4} em relação aos dados fornecidos pelo modelo.

Figura 2 - Modelos para a função $I_3(x)$ grupos 1 e 2, respectivamente



Fonte: os autores

Observou-se que, para os resistores não ôhmicos, essa forma de obtenção da condutância não se aplica, levando à necessidade de ferramentas matemáticas mais robustas. Esse foi o momento de introduzir a definição de derivada. Considerando que a resistência, nesse caso, não é constante, foi sugerido “considerá-la constante” para pequenos intervalos de variação da intensidade de corrente e, nesses intervalos, considerar a variação da tensão, obtendo um valor aproximado da resistência elétrica para aquele intervalo. Ressalta-se que, quando essa variação tende a zero, tem-se a resistência instantânea, que pode ser escrita como a derivada, conforme a Equação (07):

$$R(I) = V'(I) = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta I} \quad (07)$$

o que resulta na Equação (8):

$$G = \frac{1}{R(I)} = \frac{1}{\lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta I}} = \frac{1}{V'(I)}. \quad (08)$$

Observou-se que os modelos obtidos pelos alunos até o momento forneciam o valor da intensidade de corrente I em função da tensão V e, para o cálculo de G , era necessário o valor de $V'(I)$, ou seja, a derivada da tensão V em função da intensidade I . Uma alternativa proposta para resolver esse problema foi encontrar as funções inversas, tomando como variável independente a intensidade da corrente I e como variável dependente a tensão V . Sem muita preocupação com as formalidades para a existência e obtenção da função inversa, os alunos sugeriram aproximar outras funções mediante o uso das planilhas eletrônicas, invertendo as colunas dos valores de I e V .

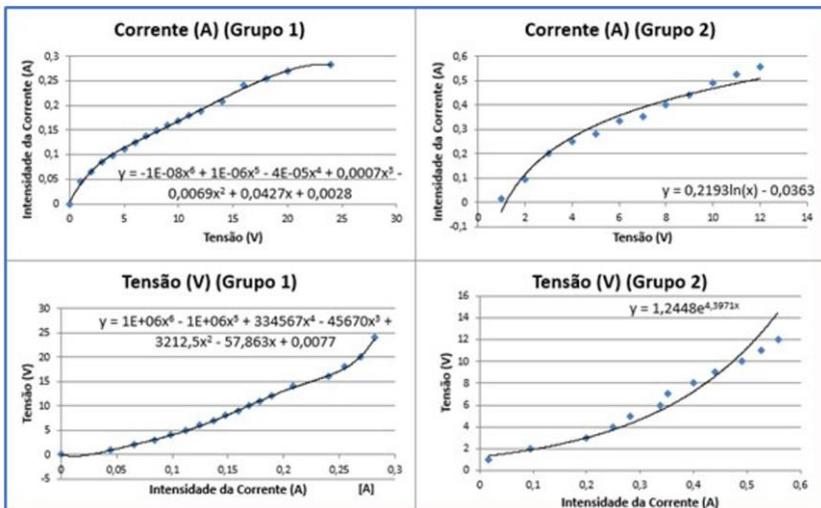
O Grupo 1 obteve a função com lei de formação dada na Equação (09), enquanto a lei de formação da função obtida pelo Grupo 2 é apresentada na Equação (10):

$$V_3(x) = 10^6x^6 - 10^6x^5 + 334567x^4 - 45670x^3 + 3212,5x^2 - 57,863x + 0,007 \quad (09)$$

$$V_3(x) = 1,2248e^{43972x} \quad (10)$$

em que V_3 representa a tensão em Volts e x a intensidade da corrente em Ampères. Isso mostra que há uma compreensão, mesmo que intuitiva, da inversão de funções. Os modelos com as funções inicialmente obtidas e “suas inversas” obtidas pela inversão das colunas de dados são mostrados na Figura 3.

Figura 3 - Comparativo dos modelos para a corrente elétrica e tensão dos Grupos 1 e 2, respectivamente



Fonte: os autores

Aproveitou-se o momento para tentar identificar se a função obtida de fato representava a inversa. No caso da função obtida pelo Grupo 2, obteve-se o seguinte raciocínio, partindo das funções apresentadas nas equações (06) e (10). Se

$$\begin{aligned}
 I(V_3) = I(x) &= 0,2193 \ln(x) - 0,00363 \text{ e } I^{-1}(V_3) = V(x) = 1,2448e^{4,3971x}, \text{ então:} \\
 I(V(x)) &= 0,2193 \ln(1,2448e^{4,3971x}) - 0,00363 = \\
 &= 0,2193 [\ln(1,2448) + \ln(e^{4,3971x})] - 0,00363 \approx \\
 &\approx 0,2193 [0,21897 + 4,3971x] - 0,00363 \approx 0,9643x + 0,04439
 \end{aligned} \tag{11}$$

onde x representa a intensidade de corrente.

Nota-se que a identidade desejada $I(V(x)) = x$ não é obtida em virtude das aproximações decimais dos modelos (erros cometidos por arredondamentos e/ou medições).

Após esse exercício, chegou o momento de fazer algumas formalizações, estudar algumas propriedades de derivadas e de funções inversas para poder dar continuidade às questões a serem modeladas. Usando a definição de função inversa e a derivação de funções compostas, conclui-se que $\frac{1}{v'(I)} = I'(V)$, de forma que a condutância elétrica pode ser dada em função da tensão elétrica por $G(V) = I'(V)$. Observou-se que, para o caso dos resistores ôhmicos, isso também está satisfeito, visto que a derivada da função linear é uma constante e essa constante é o valor de G , como já verificado anteriormente. Esse fato foi observado por George Simon Ohm no ano de 1827, quando identificou e classificou os materiais chamados ôhmicos, ou seja, que possuíam uma relação linear entre tensão e corrente elétrica, conforme descrito por Boylestad (2018).

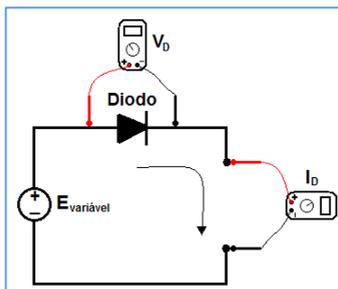
Assim, verificou-se que, tanto a derivada primeira da função polinomial de grau seis quanto a derivada primeira da função logarítmica não são constantes, o que indica que as condutâncias para os dados do experimento com as lâmpadas são variáveis, contrariando

as expectativas iniciais dos alunos. Identificou-se com eles que, geometricamente, a condutância em cada tensão x é a inclinação da reta tangente à curva da função obtida em cada modelo apresentado pelos alunos.

Para o terceiro experimento, foram usados circuitos com diodos visando explorar outras formas de funções, visto que estes não são ôhmicos. Foram usados dois diodos com características diferentes, sendo o primeiro (D1) com especificação 1N4007 e o segundo (D2), com especificação 1N4148.

Na Figura 4, é mostrado um esquema de montagem do circuito para a realização da experiência. Nele não há resistores para a limitação da corrente elétrica e, com a expectativa de que a corrente elétrica varie exponencialmente com a variação da tensão, o limite de potência dissipada dado pelo fabricante – que é de $3W$ em D1 e de $500mW$ em D2 – poderia ser rapidamente alcançado. Para a proteção dos componentes, a fonte de tensão foi configurada de forma que não entregasse ao circuito uma corrente maior que $200mA$. Em função disso e considerando as características desse tipo de componente eletrônico, as tensões aplicadas diretamente nos diodos não ultrapassaram o valor de $0,93W$.

Figura 4 - Esquema do experimento implementado para medição de corrente elétrica a partir da variação da tensão E na fonte em um diodo



Fonte: os autores

No Quadro 3, são apresentados os dados coletados nesse experimento pelos dois grupos.

Quadro 3 - Relação V x I para os circuitos com Diodos

Diodo 1		Diodo 2		Diodo 1		Diodo 2	
Tensão (V)	Corrente (A)						
0,110	0	0,100	0	0	0	0,10	0
0,215	0	0,200	0	0,10	0	0,20	0
0,309	0,0000001	0,300	0,0000007	0,20	0	0,30	0,0000012
0,353	0,0000008	0,350	0,0000026	0,30	0,0000003	0,35	0,0000032
0,392	0,0000032	0,402	0,0000088	0,35	0,0000020	0,40	0,0000084
0,444	0,0000155	0,455	0,0000267	0,40	0,0000075	0,45	0,0000240
0,500	0,0000807	0,498	0,0000665	0,45	0,0000300	0,50	0,0000840
0,503	0,0002450	0,545	0,0000182	0,50	0,0001020	0,55	0,0001900
0,549	0,0007710	0,601	0,0000613	0,55	0,0003500	0,60	0,0006010
0,650	0,0020000	0,654	0,0019240	0,60	0,0009300	0,65	0,001740
0,700	0,0068000	0,696	0,0046000	0,65	0,0025000	0,70	0,005300
0,751	0,0230000	0,749	0,0124000	0,70	0,0082000	0,75	0,012800
0,800	0,0772000	0,798	0,0288000	-	-	0,80	0,029900
-	-	0,848	0,0628000	-	-	0,85	0,061600
-	-	0,900	0,1166000	-	-	0,90	0,102400
-	-	-	-	-	-	0,93	0,149300

Fonte: os autores

Novamente os alunos foram convidados a obter funções para estabelecer as relações entre as grandezas tensão e intensidade da corrente. Com base nos valores apresentados no Quadro 3, usando as funções por ajuste de curvas disponíveis em planilha eletrônica, os alunos do Grupo 1 chegaram aos modelos apresentados nas equações (12) e (13) para os diodos D1 e D2, respectivamente, enquanto os alunos do Grupo 2 obtiveram os modelos das equações (14) e (15), respectivamente, para os diodos D1 e D2:

$$I_1(V) = 1.10^{-10} e^{25,914V} \quad (12)$$

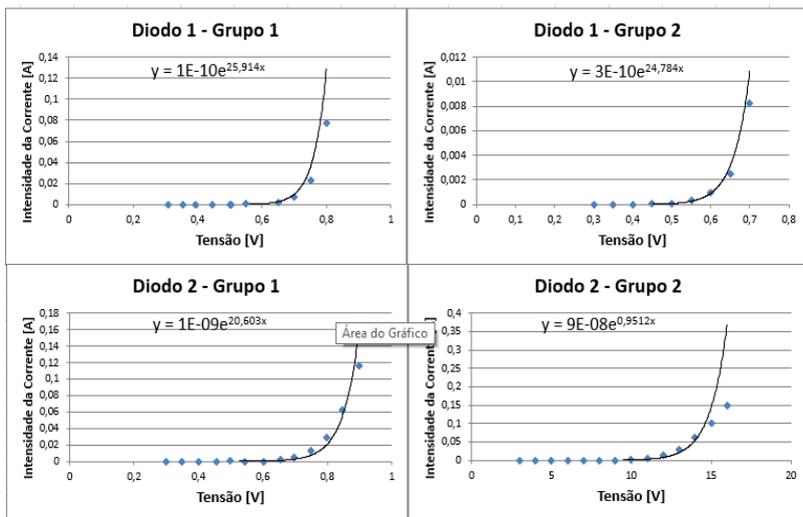
$$I_2(V) = 1.10^{-9} e^{20,603V} \quad (13)$$

$$I_1(V) = 3.10^{-10} e^{24,784V} \quad (12)$$

$$I_2(V) = 5.10^{-9} e^{19,263V} \quad (13)$$

onde I_1 e I_2 são, respectivamente, as intensidades das correntes dos diodos D1 e D2 em Ampères e V a tensão em Volts. Os modelos diferentes para mesmos diodos devem-se às diferenças nas leituras dos dados apresentadas pelos grupos, possivelmente por imprecisão do instrumento de medidas, oscilação da corrente elétrica no circuito e quantidade de dados utilizados pelos grupos. Observa-se, pelo comportamento das curvas, que, para possibilitar melhor aproximação, os alunos optaram em desconsiderar alguns pontos iniciais (os que apresentavam intensidade da corrente nula), a fim de o modelo captar melhor o crescimento exponencial, o que pode ser observado nos gráficos mostrados na Figura 5.

Figura 5 - Dados experimentais e funções ajustadas da intensidade da corrente em função da tensão na região de operação direta dos diodos



Fonte: os autores

Mesmo com funções distintas, os gráficos evidenciam melhor aproximação pelo modelo exponencial, desde que desconsiderados os pontos iniciais. Tal comportamento é esperado, uma vez que um dos modelos físicos utilizados para a região de polarização direta do diodo é dado por meio de uma exponencial, segundo Sedra (2007).

Com base nas funções obtidas, os alunos puderam constatar, a partir da derivada, que a condutância elétrica em diodos é variável. Usando o exemplo do diodo D1, do Grupo 2, apresentado na equação (12), obtém-se a condutância elétrica, conforme a Equação (14):

$$G(V) = I'_1(V) = 74,352 \cdot 10^{-10} e^{24,784V}. \quad (14)$$

Isso permitiu calcular o valor aproximado da condutância elétrica para qualquer valor da tensão no domínio considerado para a obtenção do modelo. Já para o cálculo da resistência elétrica em cada diodo, foi necessário obter as funções inversas, para, a partir dessas, calcular as derivadas, visto que $R(I) = V'(I)$. Num primeiro momento, os alunos usaram a mesma estratégia dos exemplos anteriores, com a inversão das colunas de dados e aproximação de uma nova lei matemática, expressando a intensidade da corrente em função da tensão. Considerando a estrutura das funções, que são claramente bijetivas, foi sugerida a obtenção da inversa pelo método clássico, comparando-se os dados obtidos nas duas formas. O valor máximo dessa diferença, para valores no intervalo considerado para a função $I_1^{-1} = V(I)$, foi na ordem de 10^{-2} . Aproveitou-se o momento para retomar a discussão acerca de erros gerados em aproximações e sua dependência das escolhas e simplificações feitas.

Tomando como exemplo a função obtida pelo Grupo 1 para o diodo D1 apresentado na Equação (15), obtém-se a resistência, conforme a Equação (16).

$$V_1(I) = 0,0372 \ln(I) + 0,8668 \quad (15)$$

$$R(I) = [V_1(I)]' = \frac{0,0372}{I}. \quad (16)$$

Observou-se, portanto, que a resistência elétrica no diodo depende de I , ou seja, é variável, levando à conclusão de que os diodos são materiais não ôhmicos. Análises análogas foram desenvolvidas para as demais funções, na forma de atividades propostas para os alunos.

Para a introdução do estudo de Integrais, foram utilizados dois modelos desenvolvidos pelos grupos, com a finalidade de apresentar

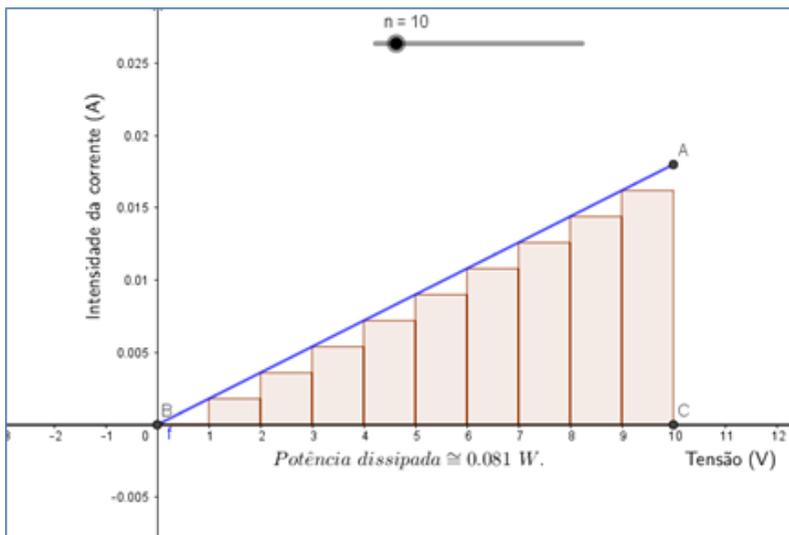
as somas de Riemann por meio das funções aproximadas pelos alunos. O estudo foi iniciado usando a relação que estabelece a corrente elétrica em função da tensão no circuito com uma resistência elétrica de 560 Ohms, apresentado na Equação (3).

Após uma rápida pesquisa, os alunos verificaram que a potência elétrica P em Watts (W) dissipada por um resistor é dada pelo produto da intensidade da corrente I pela tensão V , ou seja, $P = I \cdot V$, e que essa potência corresponde à quantidade de energia consumida por unidade de tempo. Assim, por exemplo, para uma tensão de $2,5V$, a potência será dada por

$$P(2,5) = I(2,5) \cdot 2,5 \approx 0,0045 \cdot 2,5 = 0,01125 W,$$

o que significa o consumo de 0,01125 joules por segundo.

A partir desse exemplo, ficou evidenciado que a potência seria constante quando I e V fossem constantes, porém, para I e V variáveis, a potência também iria variar. Identificou-se ainda que, para os valores constantes, a potência pode ser comparada à área de um retângulo de base medindo V e altura medindo I . O problema proposto aos alunos foi identificar qual seria a potência dissipada ao variar a tensão, considerando o intervalo de 0 a 10 volts. Foi sugerida a partição do intervalo em n subintervalos (inicialmente congruentes), considerando a intensidade da corrente constante em cada um dos subintervalos. Optou-se em cada um dos subintervalos pelo valor da intensidade da corrente calculada no seu início, o que resultou, para o exemplo em análise, em retângulos inscritos (ou aproximação por falta), como pode ser observado na Figura 6, com $n = 10$ intervalos.

Figura 6 - Aproximação da soma das potências para $n = 10$ 

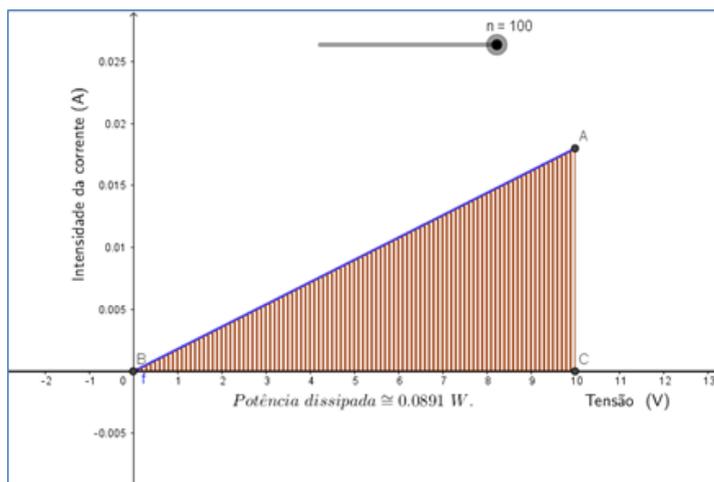
Fonte: os autores

Os alunos puderam observar que a potência, em cada intervalo, pode ser aproximada pela área do retângulo correspondente e a potência total, pela soma das áreas dos n retângulos, que, por sua vez, é uma aproximação da área limitada entre a função $I(V)$ e o eixo das abscissas, no intervalo considerado. Para facilitar a visualização, foi feita uma simulação usando o *software* GeoGebra, em que o valor de n pode ser variado a partir de um controle deslizante, mostrando que, aumentando o número de retângulos, as “perdas de área” são diminuídas, o que levou à conclusão de que quanto maior for o valor de n , melhor será a aproximação da área total e, conseqüentemente, da potência dissipada. Essa situação pode ser observada na Figura 7, onde são considerados $n = 100$ retângulos.

Como no caso analisado a função era linear, a região em análise é um triângulo retângulo, cuja área corresponde a 0,09 unidades de área, mostrando que a aproximação usada tende a esse valor quando o número de retângulos é aumentado infinitamente.

Observou-se, nesta atividade, que a potência dissipada no intervalo de 0 a 10 volts, considerando o modelo usado, é de aproximadamente $P=0,09W$ e que, para resistores ôhmicos, onde as funções são lineares (representadas geometricamente por retas), a potência pode ser obtida pelo cálculo da área de um triângulo retângulo, sendo que para esses casos os conhecimentos da geometria plana são suficientes.

Figura 7 - Aproximação da soma das potências para $n = 100$

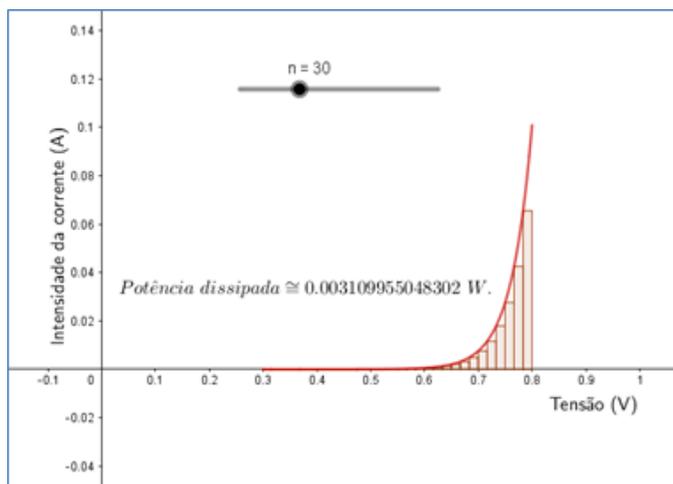


Fonte: os autores

A situação descrita constitui-se em uma motivação para estudar a solução de outras áreas, para os casos de resistores não ôhmicos, conforme o exemplo que será apresentado na sequência.

Nesta atividade, foi usado um modelo para diodo, obtido na Equação (12). Foi proposto aos alunos obter a potência dissipada para uma variação da tensão no intervalo de 0,3V a 0,8V. Usando novamente a simulação feita no GeoGebra para a aproximação de áreas, obteve-se a aproximação do valor da potência. Na figura 8, é apresentada a aproximação da potência dissipada para uma subdivisão do domínio em $n = 30$ subintervalos, obtendo-se uma soma das áreas dos retângulos inscritos no valor de 0,0031009955048302. Já para $n = 50$, a soma ficou em 0,003407408822026 e, para $n = 100$ o valor da soma foi 0,003643097232834. Observou-se ainda que, quando o número de retângulos aumenta, a largura de cada retângulo vai diminuindo, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, tem-se que $\Delta V \rightarrow 0$. Os alunos tiveram a oportunidade de repetir o processo para os demais modelos obtidos nas atividades anteriores, calculando, dessa forma, o valor aproximado da potência dissipada de acordo com o domínio fixado em cada modelo.

Figura 8 - Aproximação da soma das potências para $n = 30$



Fonte: os autores

Após essas simulações, chegou o momento para aproveitar a motivação e a compreensão alcançadas com as atividades descritas para formalizar o conceito de integração e trabalhar algumas técnicas para o cálculo de integrais. Definiu-se, portanto, a potência dissipada como o limite da soma das áreas dos retângulos inscritos (somadas de Riemann), quando o número de retângulos tende ao infinito (o que equivale à largura ΔV tender a zero), chamando essa soma de integral da função $I(V)$ sobre o intervalo dado. Assim, considerando $\Delta V_i = V_i - V_{i-1}$ a base de cada um dos n retângulos e $I(V_i)$ a respectiva altura, com $1 \leq i \leq n$, pode-se determinar a potência aproximada $P(V)$ dada pela Equação (17):

$$P(V) \cong I(V_1) \cdot \Delta V_1 + I(V_2) \cdot \Delta V_2 + I(V_3) \cdot \Delta V_3 + \dots + I(V_n) \cdot \Delta V_n \cong \sum_{i=1}^n I(V_i) \cdot \Delta V_i. \quad (17)$$

Considerando que quanto maior o número de retângulos, mais próximo da área estará essa soma, se fazendo ΔV_i se aproximar de zero, o número de retângulos tenda para o infinito e a aproximação da área tende à área exata, obtendo-se a Equação (18).

$$\lim_{\text{máx} \Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n I(V_i) \cdot \Delta V_i = P(V). \quad (18)$$

Sendo esse limite definido como a integral de a até b , da função $I(V)$, em que a e b são os extremos do intervalo de valores de V em que se quer obter a potência (ou seja, $a = V_0$ e $b = V_n$), usando a notação de integral, pode-se escrever a Equação (19).

$$P(V) = \int_a^b I(V) dV. \quad (19)$$

Após discutidas técnicas de integração de algumas funções elementares, do Teorema Fundamental do Cálculo e propriedades operatórias, os alunos foram convidados a usar esses conhecimentos para o cálculo da potência nos modelos desenvolvidos anteriormente. Para o modelo usado na ilustração anterior, obteve-se que:

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_{0,3}^{0,8} 10^{-10} e^{25,914x} dx = 10^{-10} \int_{0,3}^{0,8} e^{25,914x} dx = \\ &= \frac{10^{-10}}{25,914} [e^{20,7312} - e^{7,742}] \Big|_{0,3}^{0,8} \cong 0,003889648139 \text{ W}. \end{aligned}$$

Ao comparar o resultado da aproximação pela soma de Riemann por falta para uma partição com $n = 100$ e o resultado obtido pela integral definida, observou-se uma diferença na ordem de 10^{-4} que se justifica, uma vez que a soma de Riemann apresentada no gráfico representa uma aproximação da soma das potências no intervalo definido.

Para finalizar as atividades do projeto de modelagem, pôde-se estabelecer o Teorema do Valor Médio, ao observar que a potência média desenvolvida no intervalo pode ser obtida pela Equação (20):

$$P_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b I(V) dV. \quad (20)$$

Esse valor pode ser interpretado geometricamente como a altura de um retângulo de base $b - a$ que tenha uma mesma área da região em questão.

Análise e Considerações Finais

Ao levar os alunos para os laboratórios, buscou-se estabelecer uma relação entre o estudo de funções e a Lei de Ohm. O conhecimento sobre corrente, tensão, resistência, proporcionalidade direta e indireta pôde ser obtido pela manipulação dos materiais que compõem essa relação. Com isso a experiência serviu para gerar subsunçores que vieram a favorecer o aprendizado posterior de outros elementos da eletricidade e, principalmente, de conhecimentos de cálculo diferencial e integral, conforme sugerido por Ausubel. Tais conceitos estão associados a materiais ôhmicos, não ôhmicos e diodos de modo a aprofundar o conhecimento sobre funções e dando suporte para a introdução de novos conceitos, como por exemplo, da derivada como taxa de variação instantânea na relação entre duas grandezas dependentes uma da outra e no estudo das integrais.

Não é pretensão dos autores deste trabalho sugerir que esta é a melhor forma de trabalhar conceitos de cálculo diferencial e integral com turmas de cursos da área técnica que tenham afinidades com os conceitos da área elétrica. A intenção é apresentar esta experiência como uma opção adicional para professores que acreditam nas potencialidades do trabalho com modelagem, como forma de contextualizar e motivar os alunos para a aprendizagem. Ressalta-se, ainda, a importância de momentos de formalização e ampliação dos conceitos matemáticos que eventualmente não surgem espontaneamente no processo de modelação.

Mesmo não tendo a pretensão de obter resultados conclusivos sobre os benefícios do uso dessa metodologia de trabalho, na sequência são apresentadas algumas percepções sobre as atividades elencando-se possíveis contribuições que elas possam ter trazido para

a aprendizagem dos alunos. Essas percepções foram identificadas a partir da interação com os alunos participantes das atividades. Inicialmente, observou-se uma sinalização de que a aplicação de Modelagem Matemática, a partir dos experimentos realizados no laboratório para o ensino de Cálculo 1, é uma prática que contribui com aspectos positivos para o desenvolvimento do trabalho.

Quanto aos aspectos relativos à motivação, de forma geral os alunos mostraram-se bastante interessados em participar na realização dos experimentos e na elaboração dos modelos. Acredita-se que trabalhar conceitos da matemática associados a problemas inerentes à formação fornecida pelo curso que escolheram contribuiu para mantê-los conectados aos tópicos abordados nas aulas de Cálculo. Essa situação corrobora com a manifestação de alguns alunos durante o desenvolvimento das atividades que evidenciam a importância de associar a teoria trabalhada em sala de aula com situações práticas. Identificaram-se como fatores motivadores, a visualização do “para quê” os conceitos e os conteúdos trabalhados no cálculo servem em situações relacionadas ao curso. De forma geral, foi possível identificar que os alunos criam uma expectativa de aplicação dos conteúdos abordados nas diferentes aulas.

Embora tenham sido identificadas algumas dificuldades de aprendizagem, principalmente no que se refere a operacionalizar algumas técnicas de derivação e de integração, foram observados alguns aspectos que sugerem evidências de aprendizagem, principalmente do ponto de vista conceitual. Essas situações foram observadas durante as aulas, em que os conceitos de derivada e de integração foram construídos a partir dos modelos elaborados. Em particular, na construção das somas de Riemann, a partir da aproximação da região de interesse por retângulos, a compreensão do conceito de integral definida por praticamente todos os alunos ficou evidente.

Observou-se também em alguns momentos a percepção de alunos da importância da matemática formal para o desenvolvimento do conhecimento abstrato na perspectiva de aplicação a conceitos

posteriores. Assim, o aprendizado obtido torna-se conhecimento subsunção necessário ao que será trabalhado. Mediante o desenvolvimento do projeto, os alunos visualizaram algumas aplicações dos conceitos estudados e projetaram aplicações em situações futuras, o que mostra certo grau de amadurecimento sobre a importância do que estava sendo ensinado.

A importância atribuída ao trabalho interdisciplinar também foi perceptível em algumas manifestações dos envolvidos nas atividades. Essas percepções se referem à importância da utilização de instrumentos de medidas pertinentes ao estudo de circuitos elétricos para a geração de dados com fins didáticos. Um destaque positivo da aplicação do projeto de modelagem apontado refere-se à integração entre conteúdos e disciplinas. Neste sentido, a relação entre Matemática/Cálculo e circuitos elétricos ficou bem evidenciada nas manifestações apresentadas, valorizando o trabalho interdisciplinar gerado pelas atividades. Houve também sugestão de que poderia haver mais aulas práticas, com mais atividades que relacionem conceitos de forma interdisciplinar, o que evidencia a importância atribuída a essa forma de trabalho.

Quando se planeja um trabalho com Modelagem Matemática, frequentemente surgem preocupações com relação às possíveis restrições e dificuldades que possam surgir nesse processo. Essas situações também estiveram presentes na aplicação do presente trabalho e poderão ser superadas em futuras atividades. Uma observação feita pelos professores e também manifestada por alunos, refere-se à precisão das medidas, visto que a escala de leitura dos aparelhos disponíveis não foi capaz de detectar algumas variações de grandezas que eventualmente pudessem influenciar no comportamento das funções. Ressalta-se, porém, que essa situação não impediu o aproveitamento didático dos dados coletados.

Trabalhar em grupos com menor quantidade de alunos também foi uma sugestão de alguns alunos, com a justificativa de que isso permitiria a todos os envolvidos participar mais da manipulação das ferramentas de laboratório. Nessas sugestões, observa-se um destaque

dado pelos estudantes às atividades que envolvem manipulação de instrumentos e às experiências realizadas em laboratórios, com atividades práticas. Houve questionamentos quanto à utilização de teorias sobre derivadas e integrais antes desses conceitos terem sido abordados na sala de aula. Acredita-se que essa situação seja reflexo da estrutura tradicional de ensino a que esses alunos estão acostumados, sendo que, quando se trabalha com Modelagem Matemática, geralmente a resolução dos problemas propostos traz a necessidade da introdução de algum conceito ou alguma ferramenta, invertendo-se a lógica de apresentar os conceitos para, depois, sugerir alguma aplicabilidade.

Várias atividades foram propostas e encaminhadas para resolução extraclasse, de forma que, em alguns momentos, houve quem alegasse falta de compreensão para a execução dos problemas propostos e, nesse sentido, houve sugestão de que os problemas poderiam ter sido resolvidos em sala de aula. Identificou-se, em vários momentos, a necessidade de favorecer o desenvolvimento da autonomia dos alunos na busca de solução para os problemas, o que certamente não se concretiza apenas com uma disciplina.

O trabalho desenvolvido trouxe evidências da viabilidade de se trabalhar projetos de Modelagem Matemática em cursos de cálculo, principalmente quando associados, de forma interdisciplinar, com outros componentes que têm em sua essência o desenvolvimento de práticas de laboratório que possam gerar dados com experimentos de interesse da área de formação a que o curso se propõe. Observou-se, nesse aspecto, um importante fator motivador, uma vez que tem a potencialidade de mostrar a relevância da introdução de novos conceitos da matemática, em particular, do cálculo diferencial e integral para conseguir resolver problemas que se apresentam dentro de sua área de formação.

Ressalta-se, porém, a necessidade de se extrapolar as questões emergidas na modelagem, abordando conceitos e conteúdos que eventualmente não se mostraram necessários para resolver o problema proposto no modelo, mas que são relevantes na formação proposta no

curso. Generalizações, argumentações e formalizações de conceitos, além de estabelecer técnicas para o cálculo dos limites, das derivadas e das integrais, também se mostraram importantes atividades a serem desenvolvidas, além da modelagem. Essa necessidade decorre da compreensão de que, ao se trabalhar com a Modelagem Matemática, são essenciais os momentos de formalização de conceitos que surgem no processo de pesquisa, não sendo necessariamente suficiente discutir apenas os elementos que se evidenciam no modelo explorado. Além da proposição dos modelos, nesta pesquisa buscou-se identificar aspectos que evidenciam contribuições do trabalho com Modelagem Matemática no ensino de cálculo diferencial e integral, na tentativa de atribuir um melhor significado aos conceitos estudados pelos alunos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessôa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

ALVES, Adriana. Interdisciplinaridade e matemática. *In*. FAZENDA, Ivani (Org.). **O que é interdisciplinaridade?** São Paulo: Cortez, 2008.

BASSANEZI, Rodney. **Modelagem Matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.

BAZZO, Walter Antonio; PEREIRA, Luiz Teixeira do Vale; LINSINGEN, Iran Von. **Educação tecnológica: enfoques para o ensino de engenharia**. Florianópolis: UFSC, 2016.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2016.

BOYLESTAD, Robert. **Introdução à Análise de Circuitos**. 13. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2018.

DURÃES, Marina Nunes. Educação Técnica e Educação Tecnológica Múltiplos significados no contexto da Educação Profissional. **Educação & Realidade**, v. 34, n. 3, 2009.

MOREIRA, Marco Antonio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

SEDRA, Adel S.; SMITH, Kenneth C. **Microeletrônica**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

TRINDADE, Diamantino Fernandes. Interdisciplinaridade: um novo olhar sobre as ciências. *In*. FAZENDA, Ivani (Org.). **O que é interdisciplinaridade?** São Paulo: Cortez, 2008.

Sólidos de Revolução com Abordagem de Cálculo Numérico

Radael de Souza Parolin¹
Matheus Jardim Graces²
Renata Alves Rodrigues³

Introdução

O componente curricular de Cálculo Numérico I é um componente obrigatório na matriz curricular do Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA) do Campus Itaqui. Como continuidade, há ainda de forma eletiva, outro componente de 60 horas, intitulado Cálculo Numérico II (Componente Curricular Complementar de Graduação) (UNIPAMPA, 2017).

Constante ao final do curso, estes componentes tem exigido as habilidades e conhecimentos abordados ao longo de Cálculos Diferenciais e Integrais, além de Álgebra Linear, Geometrias, dentre outros. Como forma de dinamizar as avaliações, são propostas tarefas a partir de conteúdos específicos exigidos nos componentes, com registro em relatórios de atividades. A exemplo, no estudo de raízes de funções (ou solução de equações não lineares) são solicitadas as

¹ Doutor, Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA).

E-mail: radaelparolin@unipampa.edu.br

² Licenciado em Matemática, UNIPAMPA.

E-mail: matheusjardimgraces@gmail.com

³ Licenciada em Matemática, UNIPAMPA.

E-mail: alves25renata@gmail.com

aplicações dos métodos estudados a três funções diferentes (pensadas pelos alunos) para encontrar suas raízes.

Esta abordagem, embora muito simples, tem desafiado os alunos numa dinâmica sequencial de alguns questionamentos: O que precisa ser feito? Para que? Como? A proposta é sair de perguntas e problemas prontos (de livros ou materiais didáticos), dos quais pouco permitem/exigem questionar-se acerca de aplicações efetivas dos temas abordados.

Nesta proposta de aplicações, surge o trabalho de Modelagem Matemática como meio de desenvolvimento, mas também de avaliação. Assim, no segundo semestre de 2019, foi proposto o seguinte problema: *Reconstituir um objeto como um sólido de revolução, calculando área do plano transversal, volume do sólido e área de superfície.*

Em termos de componente curricular, o objetivo estava focado na aplicação de métodos de interpolação e integração numérica. Neste contexto, foram criados momentos de: apresentação e discussão dos métodos de interpolação e integração numérica; discussão e desenvolvimento dos objetos escolhidos; discussão e compartilhamento em fórum *online*; orientações e discussão individualizada. Destaca-se que o trabalho foi desenvolvido em 5 noites de aulas presenciais e também em momentos de atendimento individualizado, além de compartilhamento no fórum de discussão.

Por fim, a turma desenvolveu cinco sólidos de revolução, apresentados na Figura 1, são eles: cuia de chimarrão, taça de champanhe, lâmpada, peão de brinquedo, e garrafa de suco. Nem todos os acadêmicos conseguiram realizar os dois últimos objetivos, sendo assim, após o término do componente curricular, os acadêmicos participantes deste trabalho complementaram o estudo destes sólidos com esta perspectiva.

Figura 1 - Objetos escolhidos para a reconstituição



Fonte: Os autores

Escolha dos Objetos e Obtenção dos Dados

A justificativa para a escolha da cuia de chimarrão é devido ao uso diário do objeto, enraizado na cultura do Rio Grande do Sul, em especial à região do Pampa, berço da história e cultura gaúcha, da qual

se insere a UNIPAMPA. Comprova-se este uso diário durante as aulas da Universidade, que permite o consumo desta bebida em seus diferentes espaços, com exceção a ambientes laboratoriais específicos.

Para escolher a taça de champanhe, tratou-se de associar a cuia de chimarrão como objeto para bebidas, e então, se pensou em bebidas para o frio (como o vinho) e naquelas comemorativas (champanhe). Como a discussão sobre a escolha dos objetos foi realizada conjuntamente na turma, e ainda via fórum em rede social, também seguindo na linha das bebidas, uma aluna encontrou em sua casa uma garrafa utilizada para suco de uva, da qual achou interessante utilizar.

O peão de madeira definiu-se com o objetivo de escolher um brinquedo, principalmente daqueles que remontassem à infância, e de pouco uso na atualidade. Já a lâmpada foi definida a partir da observação em muitos espaços, discutindo ainda os diferentes formatos existentes, quanto à representação como sólido de revolução.

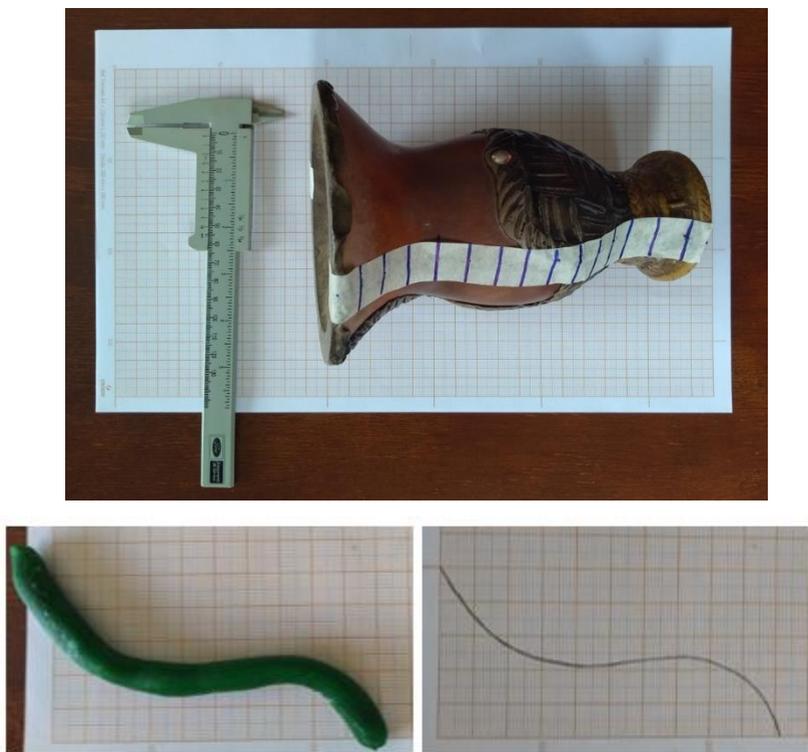
Para a obtenção das medidas da cuia, na busca de curvas que representem o sólido, foram utilizados régua, paquímetro e fita adesiva para a superfície externa (Figura 2), onde registrou-se o raio a cada centímetro de altura da cuia. Já para a obtenção da região interna, foi utilizada massa de modelar, que foi secada em forno convencional. Após este último processo, com o molde obtido, foi transferida sua curvatura em papel quadriculado (Figura 2), onde registrou-se também o raio a cada centímetro de profundidade.

No processo de medição da taça, foram demarcados 19 pontos igualmente espaçados em lados opostos, com o auxílio de uma régua e de um paquímetro, para obtenção dos diferentes diâmetros (Figura 3). O mesmo processo aconteceu para o peão de madeira, onde foram obtidos 14 pontos (Figura 4).

A garrafa foi medida a cada 1 cm, utilizando-se de régua para definir a altura e de linha de bordado para cada circunferência (Figura 5). Posteriormente, as medidas dos raios foram calculadas a partir da relação do raio com a circunferência, dada por $C = 2\pi r$.

Para as marcações da lâmpada foram utilizados os seguintes materiais: esquadro profissional, esquadro pequeno, paquímetro e um lápis. Primeiramente, dividiu-se o esquadro profissional, com o auxílio de um esquadro pequeno, em intervalos de 0,5 cm. Em seguida, o objeto foi posicionado sobre o esquadro e, verticalmente, marcaram-se na lâmpada os prolongamentos das divisões realizadas no esquadro, conforme ilustra a Figura 6. Enfim, com as marcações na superfície e com o auxílio do paquímetro, mediram-se os diâmetros de cada marcação na lâmpada, para após, obter-se o valor do raio.

Figura 2 - Processo de medição da cuia



Fonte: Os autores

Figura 3 - Processo de medição da taça de champanhe



Fonte: Os autores

Figura 4 - Processo de medição do peão de madeira



Fonte: Os autores

Figura 5 - Processo de medição da garrafa de suco



Fonte: Os autores

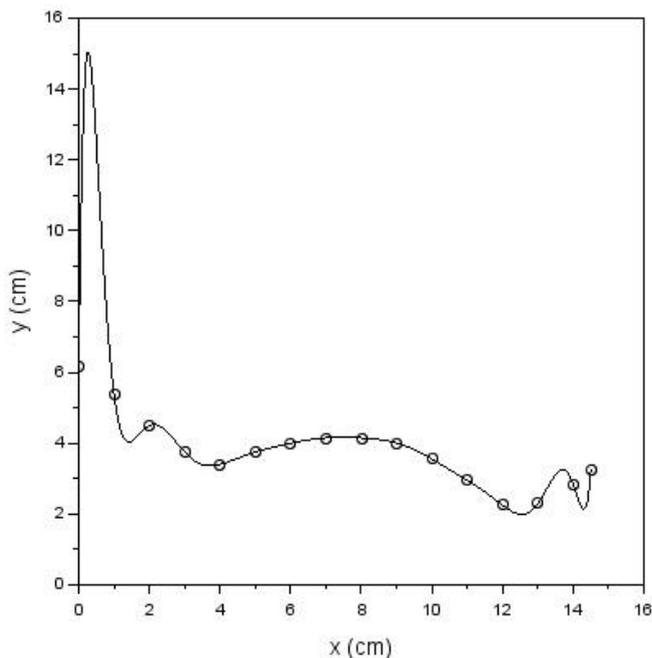
Figura 6 - Processo de medição da lâmpada



Fonte: Os autores

Curvaturas na Superfície dos Objetos

De posse dos dados das curvaturas externa e interna, foi inicialmente realizada uma interpolação lagrangeana (RUGGIERO; LOPES, 1996) para a curva externa da cuia, da qual mostrou-se pouco representativa do objeto, com picos e curvaturas inexistentes, conforme apresentado na Figura 7. Com este resultado, discutiu-se conjuntamente sobre as características dos polinômios de alto grau envolvidos, onde decidiu-se por utilizar interpolações com menor grau, na busca de uma melhor representação de todos os objetos.

Figura 7 - Interpolação lagrangeana para a curvatura externa da cuia

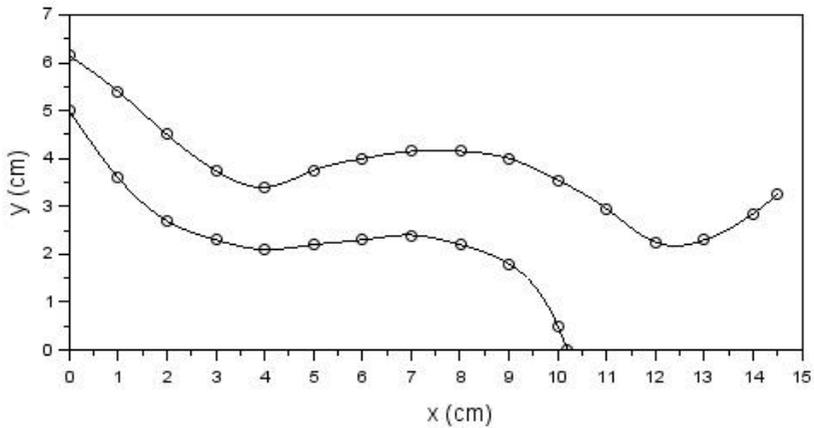
Fonte: Os autores

Para as curvas da cuia e da taça, optou-se por trabalhar com interpolações por splines cúbicos (RUGGIERO; LOPES, 1996). Assim, para a cuia utilizou-se o programa Scilab (ESI Group, 2018) para resolver o sistema de equações necessário, bem como a composição dos coeficientes dos polinômios cúbicos interpolados, dados na Equação 1. Os pontos medidos e as curvas interpoladas podem ser visualizados na Figura 8. Já para a taça, o sistema foi resolvido com o uso de uma calculadora de matrizes *online* (Matrix Calculator, 2019), e a curva representada no programa Geogebra (International GeoGebra Institute, 2019), como pode ser observado na Figura 9.

$$s_k(x) = a_k(x - x_{k+1})^3 + b_k(x - x_{k+1})^2 + c_k(x - x_{k+1}) + d_k \quad (1)$$

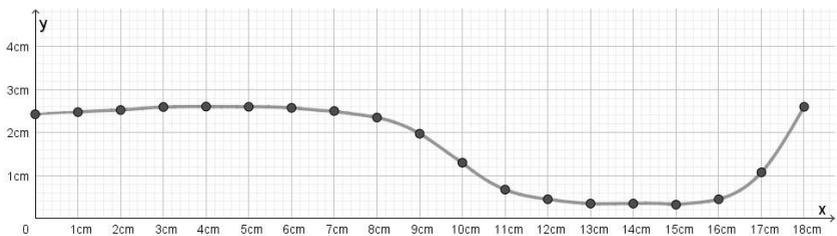
onde $k = 1, 2, 3, \dots, n$ representa o índice da equação ou do ponto; s_k o polinômio k ; x_{k+1} a coordenada x do ponto $k + 1$; a_k, b_k, c_k e d_k os coeficientes do polinômio s_k .

Figura 8 - Curvas interna e externa da cuia interpoladas por splines cúbicos



Fonte: Os autores

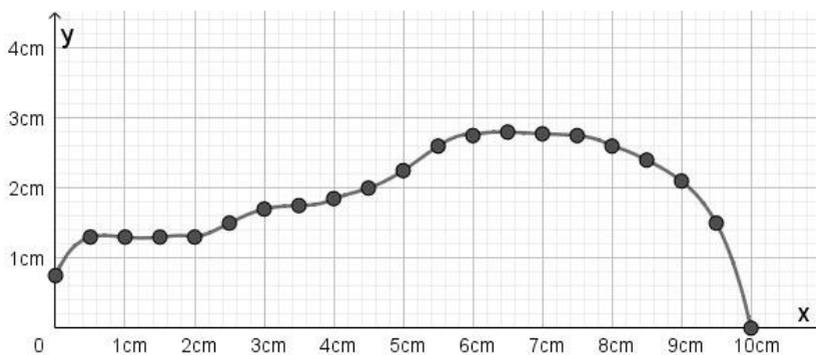
Figura 9 - Curva da taça interpolada por splines cúbicos



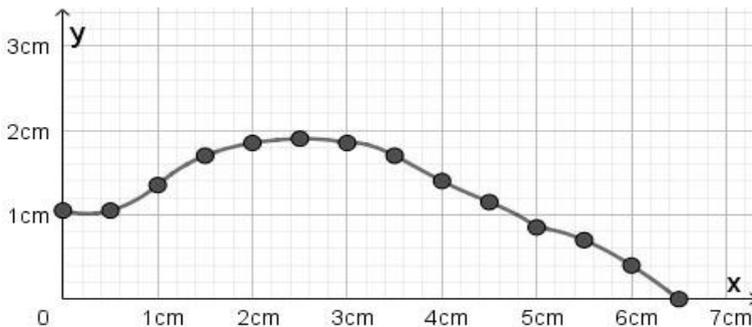
Fonte: Os autores

Na interpolação das curvas da lâmpada e do peão foi utilizada a Forma de Lagrange (RUGGIERO; LOPES, 1996), onde foram testadas diferentes quantidades de pontos. No caso da lâmpada, chegou-se como melhor representativo 5 conjuntos de 5 pontos, e portanto, interpolações com polinômios de quarto grau. Para o peão, optou-se por 4 conjuntos de pontos, na sequência de 3, 5, 5 e 4 pontos (polinômios de segundo, terceiro e quarto grau). Para o cálculo pela Forma de Lagrange foi utilizada a Janela CAS do programa Geogebra (International GeoGebra Institute, 2019), além da representação gráfica das curvas, apresentadas nas Figuras 10 e 11.

Figura 10 - Curva da lâmpada interpolada pela Forma de Lagrange

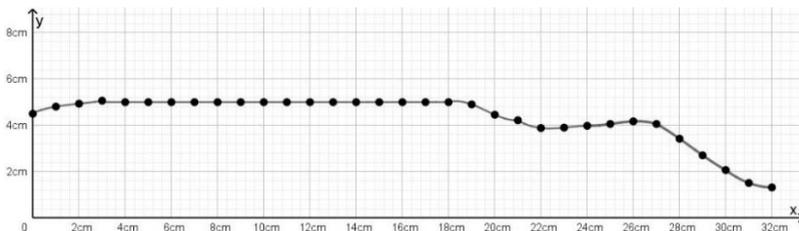


Fonte: Os autores

Figura 11 - Curva do peão interpolado pela Forma de Lagrange

Fonte: Os autores

A curvatura da garrafa foi interpolada através da resolução de sistema linear (RUGGIERO; LOPES, 1996), com suporte de uma calculadora de matrizes *online* (Matrix Calculator, 2019), onde foram utilizados 6 conjuntos de 4 pontos (polinômios de terceiro grau) e 1 conjunto de 15 pontos constantes que representam uma reta. Na Figura 12 é apresentada a interpolação da garrafa.

Figura 12 - Curva da garrafa interpolada por sistemas lineares

Fonte: Os autores

Plano Transversal aos Objetos

Para o cálculo da área da seção definida por um plano transversal à cuia, figura plana que rotaciona para formar o sólido, tomou-se a Equação 2,

$$A = \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} s_k(x) dx \quad (02)$$

que resulta em

$$A = \sum_{k=1}^n -\frac{a_k}{4} h_k^4 + \frac{b_k}{3} h_k^3 - \frac{c_k}{2} h_k^2 + d_k h_k \quad (03)$$

onde $h_k = x_{k+1} - x_k$, n é o número de intervalos.

Tomando a diferença entre as áreas abaixo da curva externa e abaixo da curva interna, delimitadas pelo eixo Ox e pelas retas $x = x_1$ e $x = x_{n+1}$, obteve-se a área da seção do plano transversal da cuia dada por 29,38 cm². No caso dos outros objetos, foram calculadas as áreas a partir da integração numérica com os dados medidos experimentalmente, pela Regra 1/3 de Simpson repetida para a taça e a lâmpada, e Regra dos Trapézios repetida para o peão e a garrafa, conforme Equações 4 e 5 (RUGGIERO; LOPES, 1996), respectivamente. Assim, obtivemos as áreas: 29,5 cm² para a taça; 19,6 cm² para a lâmpada; 8,21 cm² para o peão; 140,06 cm² para a garrafa.

$$A_{SR} = \int_{x_1}^{x_{n+1}} s(x) dx \approx \frac{h}{3} \{s(x_1) + s(x_{n+1}) + 4[s(x_2) + s(x_4) + \dots + s(x_n)] + 2[s(x_3) + s(x_5) + \dots + s(x_{n-1})]\} \quad (04)$$

$$A_{TR} = \int_{x_1}^{x_{n+1}} s(x) dx \approx \frac{h}{2} [s(x_1) + 2s(x_2) + 2s(x_3) + \dots + 2s(x_n) + s(x_{n+1})] \quad (05)$$

onde $s(x)$ representa o polinômio interpolado no intervalo $[x_1, x_{n+1}]$, com pontos igualmente espaçados e $h = h_k$.

Volume dos Objetos de Revolução

De posse da área transversal da cuia, escolheu-se utilizar o Teorema de Pappus para o cálculo do volume do sólido de revolução, dado pela Equação 6, com a determinação das coordenadas do centroide dado pelas Equações 7 e 8 (HIBBELER, 2011).

$$V = 2\pi Ad \quad (06)$$

onde A é a área transversal da região R a ser rotaciona e d a distância do centroide ao eixo de rotação.

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_R x \, dR \quad (07)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_R y \, dR \quad (08)$$

Aplicando-se as últimas equações, com $y = s_k(x)$, obtém-se as

Como a região R é composta por diferentes funções $s_k(x)$, o centroide total foi calculado a partir dos centroides locais, considerando-se as Equações 11 e 12 (HIBBELER, 2011). Os centroides podem ser visualizados na Figura 13.

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{1}{A} \left[\frac{a_k}{5} (x_{k+1}^5 - x_k^5) + \frac{(b_k - 3a_k x_{k+1})}{4} (x_{k+1}^4 - x_k^4) \right. \\ + \frac{(3a_k x_{k+1}^2 - 2b_k x_{k+1} + c_k)}{3} (x_{k+1}^3 - x_k^3) \\ \left. + \frac{(-a_k x_{k+1}^3 + b_k x_{k+1}^2 - c_k x_{k+1} + d_k)}{2} (x_{k+1}^2 - x_k^2) \right] \quad (09) \end{aligned}$$

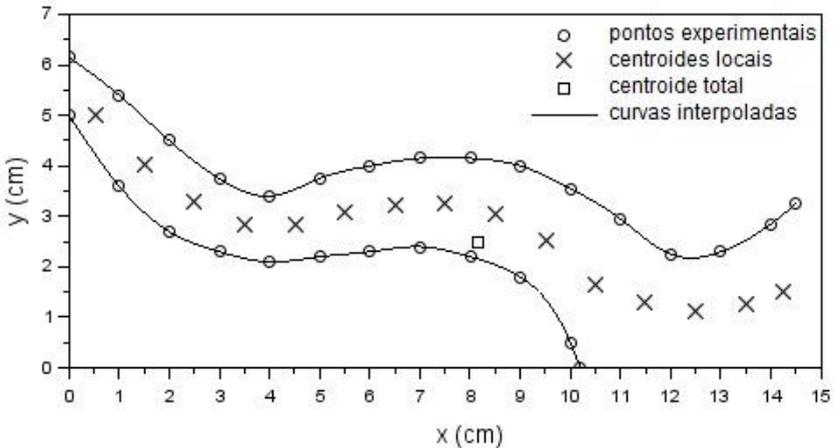
$$\begin{aligned} \bar{y} = \frac{1}{2A} \left[\frac{a_k^2}{7} h_k^7 - \frac{a_k b_k}{3} h_k^6 + \frac{(b_k^2 + 2a_k c_k)}{5} h_k^5 - \frac{(a_k d_k + b_k c_k)}{2} h_k^4 \right. \\ \left. + \frac{(c_k^2 + 2b_k d_k)}{3} h_k^3 - c_k d_k h_k^2 + d_k^2 h_k \right] \quad (10) \end{aligned}$$

Como a região R é composta por diferentes funções $s_k(x)$, o centroide total foi calculado a partir dos centroides locais, considerando-se as Equações 11 e 12 (HIBBELER, 2011). Os centroides podem ser visualizados na Figura 13.

$$\bar{x}_T = \frac{\sum_{k=1}^n A_k \bar{x}_k}{\sum_{k=1}^n A_k} \quad (11)$$

$$\bar{y}_T = \frac{\sum_{k=1}^n A_k \bar{y}_k}{\sum_{k=1}^n A_k} \quad (12)$$

Figura 13 - Centroides locais e total na cuia



Fonte: Os autores

Utilizou-se então a Equação 6 para o cálculo do volume do sólido de revolução, considerando-se $d = \bar{y}_T$, já que o eixo x foi considerado como eixo de rotação. Assim, o volume obtido da cuia foi de 465,52 cm³. Para os outros sólidos, foi utilizada a Equação 13 (STEWART, 2016a).

$$V = \pi \int r^2(x) dx \quad (13)$$

onde $r(x)$ representa o raio do objeto ao longo do eixo x , obtidos experimentalmente.

No cálculo da integração numérica da Equação 13, foi utilizada a Regra 1/3 de Simpson repetida para a taça e a lâmpada, e a Regra dos Trapézios repetida para o peão e a garrafa (RUGGIERO, LOPES, 1996). Por fim, obtivemos os volumes: 203,31 cm³ para a taça; 133,2 cm³ para a lâmpada; 38,27 cm³ para o peão; 2019,88 cm³ para a garrafa.

Área de Superfície e Comprimento do Arco dos Objetos de Revolução

Com o objetivo de encontrar a área da superfície de revolução (em torno do eixo x) e o comprimento dos arcos externos e internos $s_k(x)$ da cuia, foram utilizadas as Equações 14 e 15 respectivamente (STEWART, 2016a).

$$A_s = 2\pi \int_{x_k}^{x_{k+1}} s_k \sqrt{1 + \left(\frac{ds_k}{dx}\right)^2} dx \quad (14)$$

$$a = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + \left(\frac{ds_k}{dx}\right)^2} dx \quad (15)$$

O uso destas últimas equações se deu a partir da derivada algébrica da Equação 1, mas com a integração numérica pela Regra

1/3 de Simpson repetida (RUGGIERO; LOPES, 1996), com o suporte do programa Scilab (ESI Group, 2018). Como resultados, obteve-se por arco externo um comprimento de 16,35 cm, enquanto um arco interno de 12,5 cm. Já a área de superfície externa da cuia encontrada foi de 385,46 cm² e uma área interna de 188,53 cm².

Para a solução das Equações 14 e 15 no caso dos outros objetos, também foram utilizadas as derivadas algébricas de suas funções interpoladas, calculadas no programa Geogebra (International GeoGebra Institute, 2019), sendo realizada a integração numérica pela Regra 1/3 de Simpson repetida para a taça e a lâmpada, e pela Regra dos Trapézios repetida para o peão e a garrafa (RUGGIERO, LOPES, 1996). As áreas de superfície e os arcos encontradas foram, respectivamente: 200,76 cm² e 19,59 cm para a taça; 139,95 cm² e 12,23 cm para a lâmpada; 57,28 cm² e 7,39 cm para o peão; 899,45 cm² e 32,95 cm para a garrafa.

Reconstituição dos Objetos

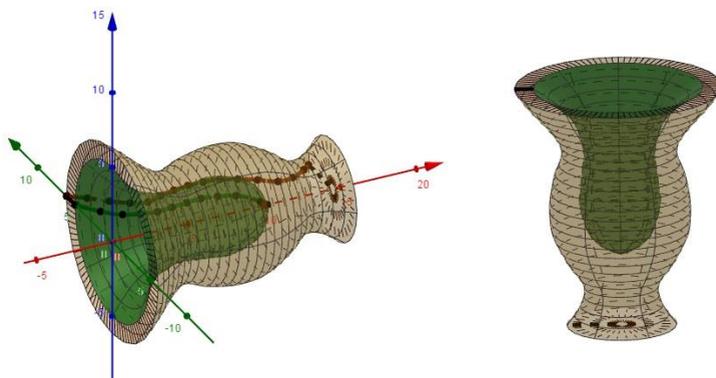
A reconstituição comutacional dos objetos, envolvendo o estudo e aplicação da revolução de sólidos, centralizou-se no uso de parametrização das curvas externas e internas obtidas anteriormente para a construção das superfícies, generalizadas na Equação 16 (STEWART, 2016b).

$$S_k = \begin{pmatrix} t \\ s_k(t) \cos \alpha \\ s_k(t) \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (16)$$

com t de 0 a x_n e α de 0 a 2π .

Por fim, seguem a reconstituição dos objetos no programa Geogebra (International GeoGebra Institute, 2019), representados nas Figuras 14, 15, 16, 17 e 18.

Figura 14 - Reconstituição da cuia de chimarrão



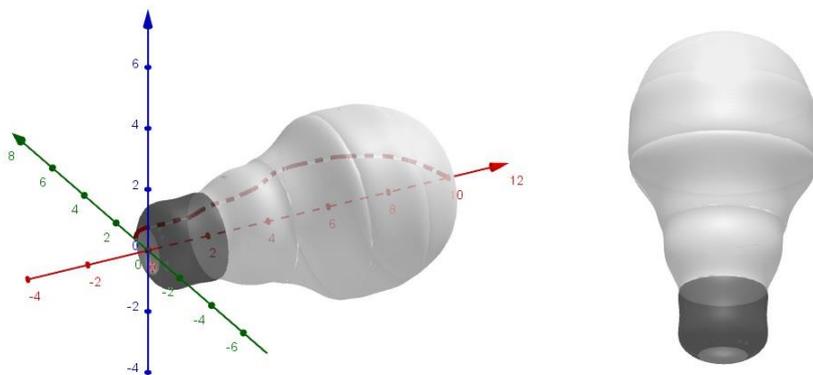
Fonte: Os autores

Figura 15 - Reconstituição da taça de champanhe



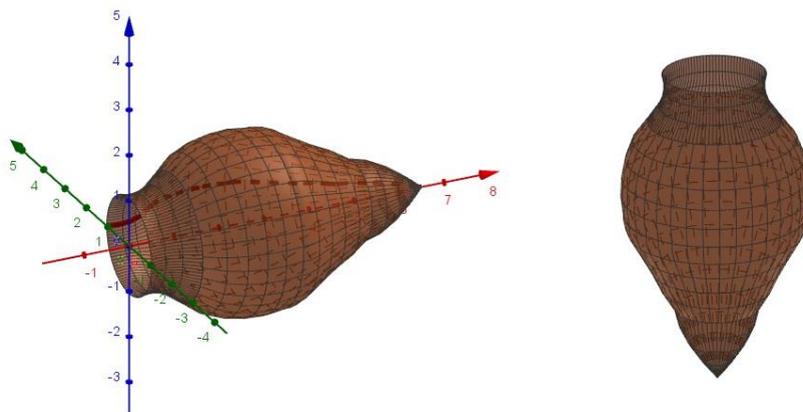
Fonte: Os autores

Figura 16 - Reconstituição da lâmpada LED



Fonte: Os autores

Figura 17 - Reconstituição do peão de brinquedo

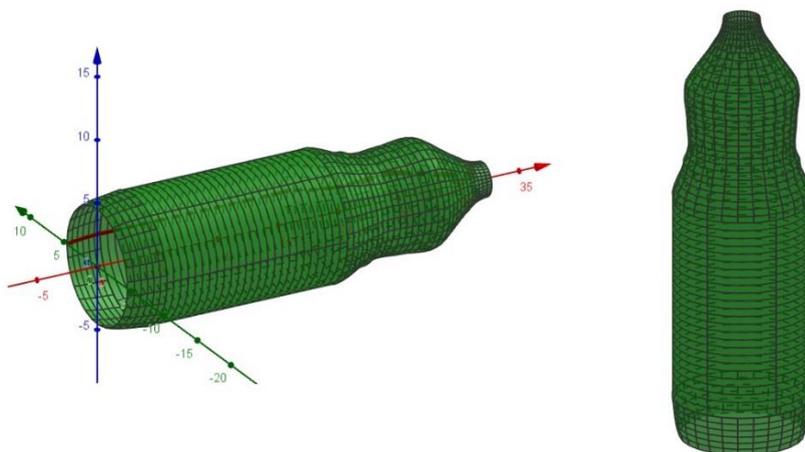


Fonte: Os autores

Considerações Finais

Diante do problema de reconstituição dos objetos propostos, se percebe que a aplicação dos métodos numéricos estudados no componente curricular pode ser vantajosa, pois, desta maneira, estudos em torno de problemas correlatos podem ser desenvolvidos, e assim despertar o interesse por métodos numéricos que estão diretamente relacionados à matemática aplicada.

Figura 18 - Reconstituição da garrafa de suco



Fonte: Os autores

Desta forma, destaca-se que o trabalho realizado contemplou diversos conceitos matemáticos estudados em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra Linear do curso, no sentido de determinar a solução numérica dos problemas. Ademais, foram combinadas diferentes ferramentas para o desenvolvimento das atividades, em especial, destaca-se a utilização do programa

computacional GeoGebra 3D para a visualização dos respectivos objetos reconstituídos e de suas curvas interpoladas.

Além disso, três objetos reconstruídos, a partir das curvas interpoladas, tiveram uma representação apenas da superfície, uma vez que a representação do interior dos objetos necessita de uma maior quantidade de informações. Assim, obteve-se a representação interna apenas de um objeto, a cuia de chimarrão.

Com relação à representatividade dos objetos selecionados, observa-se que os mesmos foram desenvolvidos exitosamente, levando em consideração os erros decorrentes das medições, bem como, os erros de arredondamento ou truncamento adotados. Neste sentido, as curvas obtidas pelo método de Splines Cúbicos foram as que melhor traduziram os objetos.

Por fim, a utilização de métodos numéricos computacionais se torna de extrema importância para resolver cálculos longos e complexos de maneira mais eficiente, assim como utilizado para reconstituir objetos e superfícies presentes no cotidiano, a exemplo dos realizados neste trabalho.

REFERÊNCIAS

ESI Group. Programa Scilab 6.0.2 [homepage na Internet]. França, 2018. Disponível em: <http://www.scilab.org>. Acesso em: 10 ago. 2019.

HIBBELER, R. C. **Estática**: Mecânica para Engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

International GeoGebra Institute. Programa GeoGebra 6 [homepage na Internet]. Áustria, 2019. Disponível em: <http://www.geogebra.org/>. Acesso em: 10 ago. 2019.

Matrix Calculator. [homepage na Internet]. Rússia, 2019. Disponível em: <https://matrixcalc.org/pt/slu.html>. Acesso em: 10 ago. 2019.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson; Makron Books, 1996.

STEWART, J. **Cálculo**: volume 1. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

STEWART, J. **Cálculo**: volume 2. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Universidade Federal do Pampa. Projeto Pedagógico do curso de Matemática - Licenciatura. Itaqui: UNIPAMPA, 2017. Acesso em: 20 de maio de 2018. Disponível em: <http://cursos.unipampa.edu.br/cursos/licenciaturaemmatematicaitaqui/files/2014/05/ppc-matematica-2017-v2-julho-2017.pdf>

Modelagem Matemática do Crescimento de Plantas de Milho

Denise Schwendler¹

Pedro Augusto Pereira Borges²

Introdução

A primeira versão deste trabalho foi resultado da proposta de modelar uma situação-problema, como parte das atividades da disciplina de Cálculo Numérico do Curso de Matemática – Licenciatura da UFFS, no segundo semestre de 2019. A escolha do tema foi devido à vivência da Denise²⁴ com a área agrícola, atividade de seus pais e de seu namorado, em Itapiranga/SC. Nesse ambiente, saberes técnicos de como preparar a terra, adubar, espaçar as plantas, escolher a variedade do milho, são parte da experiência de produção, que passa de pai para filhos, assim como das inserções de processos tecnológicos, aprendidos em cursos promovidos por cooperativas ou empresas da área. Nesse ambiente cultural, os agricultores observaram que os pés de milho plantados próximos aos postes com iluminação cresciam mais do que os plantados em condições naturais. Evidentemente, iluminar toda a

¹ Graduanda, Matemática-Licenciatura, UFFS/Chapecó.

E-mail denise.schwendler@hotmail.com

² Doutor em Engenharia Mecânica, UFFS/Chapecó.

E-mail: pedro.borges@uffs.edu.br

²⁴ Coautora deste trabalho.

lavoura não seria uma alternativa viável economicamente, mas revela a capacidade de observação, de atenção e zelo dos agricultores com o seu objeto de trabalho. Desse ambiente cultural, originou-se a questão de pesquisa: Qual é a função, no sentido matemático, que modela o crescimento de um pé de milho? O objetivo da investigação limita-se a produzir um modelo e estudar seus coeficientes, que eventualmente poderia ser empregado para ajustar curvas em pesquisas sobre a influência de determinadas variáveis sobre o crescimento de vegetais.

Para além de resultados do modelo em si, também é objetivo deste trabalho apresentar fatos e reflexões sobre a experiência de modelar na Licenciatura, no sentido de construir e contextualizar conceitos, em um ambiente de Matemática Aplicada, ações fundamentais para a formação de professores.

Uma revisão bibliográfica, apresentada na segunda seção deste trabalho, esclareceu a importância de saber como crescem os vegetais para a Botânica, a Agronomia e as Engenharias Florestal e Ambiental, além de identificar as variáveis (solo, genética da planta, água e iluminação) e os modelos matemáticos existentes sobre o crescimento de vegetais.

A escolha de monitorar o crescimento – ao invés de utilizar dados da literatura – ocorreu pela disposição da lavoura dos familiares da Denise, recém plantada com milho, cujo período de desenvolvimento coincidiu com o semestre em curso. O monitoramento, os métodos de coleta, o tratamento dos dados e as estratégias para evitar a perda de trabalho com eventuais quebras de plantas estão explicitados na terceira seção.

Paralelamente ao monitoramento experimental, foram desenvolvidos os conhecimentos matemáticos necessários para o modelo. As noções sobre Equações Diferenciais, Sistemas de Equações – adquiridas em disciplinas já cursadas – foram fundamentais para entender o modelo logístico e a determinação dos parâmetros por métodos numéricos. A descrição das equações, dos métodos, da

implementação computacional e da análise dos resultados está referida na quarta seção.

Na quinta seção são comentadas algumas questões relativas ao emprego da modelagem no ensino de Cálculo Numérico e possíveis contribuições desse tipo de estratégia de ensino para a formação de professores.

O Crescimento de Vegetais

O crescimento de vegetais está associado a diferentes fatores, objeto de estudo da Fisiologia Vegetal. Esse ramo da Botânica descreve o crescimento como um termo qualitativo que se relaciona a mudanças de tamanho e/ou massa. Os aumentos de tamanho ocorrem geralmente em uma única direção, que pode ser a altura de caules, o diâmetro, a área de folhas, além de outros. Em relação às etapas de crescimento, Lucchesi faz a seguinte observação:

No início, como depende de reservas contidas nas sementes, o crescimento é lento; posteriormente, após o desenvolvimento do sistema radicular e a emergência das folhas, tem um rápido crescimento através da retirada de água e nutrientes do substrato onde está e através da sua atividade fotossintética. Após atingir o tamanho definitivo, entra para a fase de senescência, que resulta em um decréscimo no acúmulo de matéria seca. (LUCCHESI, 1984, p. 182).

Condições ecológicas adequadas, fatores internos, como os hormônios vegetais, e externos, como a luz, a água e a temperatura, em níveis adequados, interferem quantitativamente em todas as fases do crescimento e do desenvolvimento. É fundamental esclarecer que crescimento e desenvolvimento são dois conceitos frequentemente confundidos, porém, cada um apresenta suas características próprias. Para Pes e Arenhardt (2015), o crescimento se refere ao aumento irreversível do tamanho ou volume da planta, enquanto o

desenvolvimento está relacionado ao processo em que as plantas passam pelas diversas fases fenológicas. “Todas as plantas de milho seguem um mesmo padrão de desenvolvimento, porém, o intervalo de tempo específico entre os estádios e o número total de folhas desenvolvidas podem variar entre híbridos diferentes, ano agrícola, data de plantio e local” (MAGALHÃES; DURÃES, 2006, p. 2). Para esses autores, de modo geral, os vegetais têm dois períodos de desenvolvimento: o vegetativo e o reprodutivo. Já Peixoto e Peixoto identificam seis fases do desenvolvimento: germinação, juvenilidade, maturação, reprodução, senescência e morte” (PEIXOTO; PEIXOTO, 2009, p. 39-40).

A descrição fisiológica das fases do desenvolvimento pode ser auxiliada pela análise das variáveis do crescimento, na forma de modelos matemáticos. Lyra *et al.* (2008) em seus estudos, tiveram o objetivo de

avaliar os ajustes do modelo logístico às variáveis de crescimento, altura da planta e matéria seca da parte aérea (caule, folhas, espiga e total) e de um modelo exponencial ao índice de área foliar, em função dos graus-dias acumulados ou dos dias após a emergência, em diferentes épocas de plantio e manejo da cultura do milho, variedade BR 106, no município de Rio Largo – AL. (LYRA *et al.*, 2008, p. 213).

Nesse estudo, mediante dois experimentos em que acompanharam o cultivo dessa variedade de milho, chegaram a resultados positivos, considerando que os modelos mostram conformações significativas. Assim, percebe-se que os modelos matemáticos estão presentes nos estudos e em práticas do cultivo de vegetais, particularmente no crescimento de plantas de milho, indicando ser um recurso que pode oferecer diversas vantagens nas áreas de pesquisa e no meio agropecuário.

Para estudos de análise do crescimento de vegetais e, em especial, das plantas de milho, são utilizados modelos matemáticos

elaborados a partir de alguns parâmetros. Entre os diversos resultados, “o uso de modelos diretamente por agricultores ou consultores também ajuda na visualização do impacto de escolhas de manejo em resultados não visíveis” (ANDRADE *et al.*, 2009, p.12). Nessa área, Matthew e Stephens (2002 *apud* ANDRADE *et al.*, 2009) consideram que há três aplicações para os modelos de culturas: como ferramenta de pesquisa; como ferramenta para tomada de decisões; como ferramenta em ensino, treinamento e transferência de tecnologia.

Costa e Barros (2001) desenvolveram e testaram um modelo de simulação de crescimento, desenvolvimento e rendimento da cultura de milho, sendo que o experimento contou com coleta de dados em que foi realizada a medição da altura das plantas, da área foliar, da matéria seca do caule, das folhas e das raízes. O modelo foi construído em partes, tendo como parâmetros a eficiência fotossintética e a respiração de manutenção, o que possibilitou uma representação adequada do crescimento e acúmulo de matéria seca da cultura de milho.

Condições de Plantio, Monitoramento e Dados do Crescimento do Milho

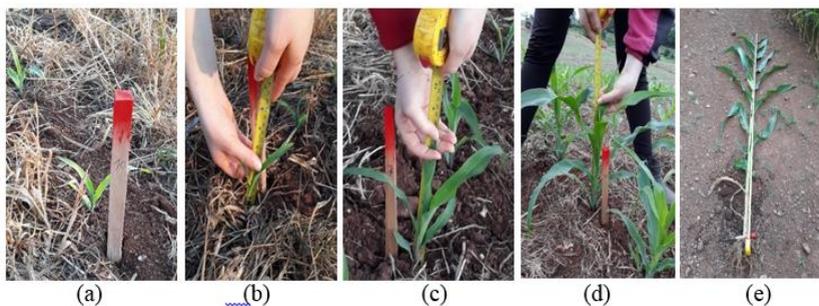
As plantas de milho observadas são do tipo *30 r 50 Pioneer*, plantadas com 3,7 grãos por metro em cada fileira e distância entre essas de 0,51 m. Na semeadura, foram aplicados 10 sacos de 50 kg de adubo por hectare. No decorrer do crescimento, foram efetuadas duas aplicações de ureia com 5,3 sacos de 50 kg por hectare em cada aplicação, além de três aplicações de inseticidas: a primeira contra percevejos e lagartas; a segunda para o controle de plantas concorrentes; e a terceira contra a ferrugem. Além desses tratamentos, é necessário considerar as condições climáticas do período. Nas primeiras quatro semanas de coleta de dados, não ocorreram chuvas, enquanto no período seguinte, as condições climáticas foram satisfatórias para o crescimento das plantas.

Dois grupos de plantas, cada um com cinco pés de milho escolhidos aleatoriamente no primeiro dia, em duas regiões da lavoura,

foram monitorados entre 15 de setembro e 24 de novembro de 2019. As plantas do Grupo I, P_i , com $i=1, 2, \dots, 5$ foram semeadas no dia 29 de agosto e as do Grupo II, P_i , com $i=6, 7, \dots, 10$ no dia 03 de setembro de 2019. A definição de dois grupos deve-se a dois motivos: primeiro, diminuir o risco de interrupção da sequência de coleta de dados por acidentes naturais e ocasionais, tais como a quebra de caule devido à ação do vento, pisoteio de animais ou pela própria rotina de manutenção da lavoura; segundo, diminuir a influência das condições naturais locais de solo, água e iluminação.

Cada planta foi identificada com uma estaca numerada, como mostra a Figura 1(a). A medida da altura foi obtida com o auxílio de uma trena metálica, com uma extremidade ajustada ao chão e a outra na ponta da folha mais nova (Figuras 1(b, c e d). As medições ocorreram com intervalo de uma semana, exceto a última, realizada após um intervalo de duas semanas, visando ao registro de dados no período de estabilidade da altura das plantas (altura máxima).

Figura 1 - Coleta de dados



Fonte: Denise Schwendler

Tem-se a informação, dos agricultores, de que o solo das plantas do primeiro grupo (argiloso) é mais fértil do que o do segundo

(rochoso). Durante a medição das alturas, uma planta do segundo grupo não se desenvolveu e por isso, foi desconsiderada na análise, de modo que esse ficou apenas com quatro plantas, numeradas de P₆ até P₉. As diferenças de solo e data de plantio podem ser consideradas para explicar os diferentes desenvolvimentos das plantas de cada grupo.

Os dados (tempo, altura) foram organizados em tabela eletrônica, o que possibilitou calcular as médias e o acompanhamento gráfico do crescimento particular de cada pé de milho. As alturas foram medidas inicialmente em centímetros, sendo posteriormente convertidas para metros, de modo a evitar problemas de *overflow* durante o tratamento dos dados. As médias das alturas das plantas dos dois grupos são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Média das alturas (h) e desvio padrão (σh) das plantas dos dois grupos

Tempo (semanas)		0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
Grupo I	$h (m)$	0,15	0,28	0,38	0,63	1,06	1,63	1,90	2,41	2,95	3,01
	σh	0,03	0,04	0,03	0,08	0,11	0,05	0,10	0,11	0,11	0,15
Grupo II	$h (m)$	0,11	0,18	0,25	0,43	0,67	0,98	1,20	1,64	2,32	2,83
	σh	0,01	0,02	0,01	0,01	0,05	0,07	0,08	0,09	0,12	0,09

Fonte: os autores

Modelagem matemática do crescimento de plantas de milho

O modelo matemático escolhido para descrever o crescimento considera que a taxa de variação da altura da planta é proporcional ao produto da própria altura por uma função linear dessa, na forma da Equação Diferencial Ordinária (EDO) da Eq. (1).

$$\frac{dh}{dt} = h \left(r - \frac{r}{K} h \right) \quad (1)$$

Onde h é a altura da planta (m), r é um coeficiente real ($m/dias$), K é a altura máxima da planta (m) e t é o tempo ($dias$).

A solução analítica da EDO da Eq. (1) com a condição inicial $h(0) = h_0$ é a função logística mostrada na Eq. (2).

$$h(t) = \frac{h_0}{\frac{h_0}{K} + \left(1 - \frac{h_0}{K}\right) e^{-rt}} \quad (2)$$

Onde h_0 é a altura inicial (m).

Os dois parâmetros r e K da Eq. (2) podem ser determinados com base em dados experimentais e, assim, informam propriedades específicas da planta. O parâmetro K é a altura máxima e r um parâmetro associado ao desenvolvimento: para os mesmos valores de K , quanto maior o r , menor será o ciclo de vida do pé de milho. Dois métodos de estimação de parâmetros foram implementados neste trabalho. O primeiro é uma extensão do método empregado nas soluções analíticas de EDO, que resolve numericamente um sistema de duas equações não lineares. O segundo é o método de ajuste não linear de curvas.

Método I: Método da EDO com dois pontos

Em problemas de valor inicial de EDO, determina-se o coeficiente em função de um ponto conhecido da solução (um dado experimental), diferente da condição inicial. Todo processo de medida

tem alguma incerteza, devido aos erros de processos e aferição dos equipamentos, o que gera uma certa dispersão dos pontos, ou seja, dificilmente estarão sobre uma função monótona. Assim, o coeficiente da solução da EDO, provavelmente, não será único (terá um valor para cada ponto), o que torna esse método limitado. Mesmo assim, o método é amplamente empregado nos livros de EDO (BOYCE; DI PRIMA, 2016; ZILL, 2018) e atende aos objetivos de ensino, fornecendo um valor para o parâmetro da solução. O Método I, proposto neste trabalho, amplia a ideia inicial do método da EDO, tornando-o mais eficiente.

Para a estimação de r e K da Eq. (2) pelo Método I, parte-se da hipótese de que existe, ao menos, um par de pontos do conjunto de dados experimentais, pelos quais passa a função da Eq. (2), com coeficiente de determinação maior do que os outros pares de pontos.

Passo 1: Escolher de dois pontos distintos $P_A=(t_A, h_A)$ e $P_B=(t_B, h_B)$ entre os dados experimentais $P_i=(t_i, \bar{h}_i)$ com $i = 1, \dots, 10$ da Tabela 1.

Passo 2: Substituir as coordenadas P_A e P_B na Eq. (2), obtendo-se um sistema não linear de equações, dado pela Eq. (3).

$$\begin{cases} h_A = \frac{h_o}{\frac{h_o}{K} + \left(1 - \frac{h_o}{K}\right) e^{-rt_A}} \\ h_B = \frac{H_o}{\frac{h_o}{K} + \left(1 - \frac{h_o}{K}\right) e^{-rt_B}} \end{cases} \quad (3)$$

Passo 3: Resolver o sistema da Eq. (3) pelo Método de Procura em Rede (MPR) (adaptado de BORGES *et al.*, 2008), obtendo-se os parâmetros r e K .

O MPR, adaptado para a resolução do sistema da Eq. (3), consiste dos seguintes procedimentos:

- 1º) Escolher intervalos $\mathbf{r} = [r_{min}, r_{max}]$ e $\mathbf{K} = [K_{min}, K_{max}]$ que hipoteticamente conttenham os valores procurados desses parâmetros. Particionar os intervalos \mathbf{r} e \mathbf{K} obtendo-se $r_i = r_{min}, r_2, \dots, r_{max}$ e $K_j = K_{min}, K_2, \dots, K_{max}$, onde m é o número de estimativas para cada parâmetro;
- 2º) Calcular h_A e h_B com a Eq. (3) para cada par de parâmetros (r_i, K_j) ;
- 3º) Calcular os respectivos $D(i, j) = (h_A - \bar{h}_A)^2 + (h_B - \bar{h}_B)^2$ para cada par de parâmetros (r_i, K_j) , onde \bar{h}_A e \bar{h}_B são as alturas medidas das plantas nos pontos P_A e P_B ;
- 4º) Escolher o par de parâmetros (r_i, K_j) que minimiza D . Esse par de parâmetros, assim como a curva gerada por eles, serão chamados, neste trabalho, de parâmetros e curva *ideais*, em vez de *ótimos*.

Passo 4: Calcular o coeficiente de determinação R^2 (Eq. (4)) considerando os pontos experimentais $P_i = (t_i, \bar{h}_i)$ e os pontos $Hi = (t_i, h_i)$ obtidos com a Eq. (2) e os parâmetros r e K do Passo 3.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{10} (h_i - \bar{h}_i)^2}{(h_m - \bar{h}_i)^2} \quad (4)$$

$$\text{Onde } h_m = \frac{\sum_{i=1}^{10} \bar{h}_i}{10}.$$

Passo 5: Repetir os Passos 1 a 4 para cada dupla de pontos P_A e P_B , sendo $A \neq B$.

Passo 6: Escolher o R^2 máximo entre os coeficientes obtidos para cada dupla de pontos P_A e P_B no Passo 5. Os parâmetros

correspondentes a essa dupla de pontos são os parâmetros *ideais* r e K .

Evidentemente, trata-se de um ajuste sub-ótimo, visto que podem existir outras curvas, que não passam nos pontos experimentais e apresentam correlação mais eficiente. Por esse motivo, optou-se por chamar r e K de parâmetros *ideais*, ao invés de ótimos.

Método II: ajuste não linear de curvas

Como $h(t)$ da Eq. (2) não é polinomial, para determinar os parâmetros r e K , foi empregado o ajuste não linear, novamente pelo Método de Procura em Rede. Diferentemente do Método I, este método tem o objetivo de determinar os parâmetros de uma função que maximize o coeficiente de determinação em $0 < R^2 < 1$, sem necessariamente passar por qualquer dos pontos experimentais.

O MPR, adaptado para o Método II, consiste dos seguintes procedimentos:

- 1º) Escolher intervalos $\mathbf{r} = [r_{min}, r_{max}]$ e $\mathbf{K} = [K_{min}, K_{max}]$ que hipoteticamente conttenham os valores procurados desses parâmetros. Particionar os intervalos \mathbf{r} e \mathbf{K} obtendo-se $r_i = r_{min}, r_2, \dots, r_{max}$ e $K_j = K_{min}, K_2, \dots, K_{max}$, onde m é o número de estimativas para cada parâmetro;
- 2º) Calcular $h(t)$ com a Eq. (2) para cada par de parâmetros (r_i, K_j) para os n tempos t dos dados experimentais;
- 3º) Calcular as respectivas somas de diferenças $E(i, j) = \sum_{k=1}^{10} (h_k - \bar{h}_k)^2$ para cada par de parâmetros (r_i, K_j) , onde h_k e \bar{h}_k são as alturas calculadas no Passo 2 e as medidas, respectivamente;
- 4º) Escolher o par de parâmetros (r_i, K_j) que minimiza E como o par *ideal* de parâmetros;
- 5º) Calcular o coeficiente de determinação R^2 para o par *ideal* de parâmetros (r_i, K_j) .

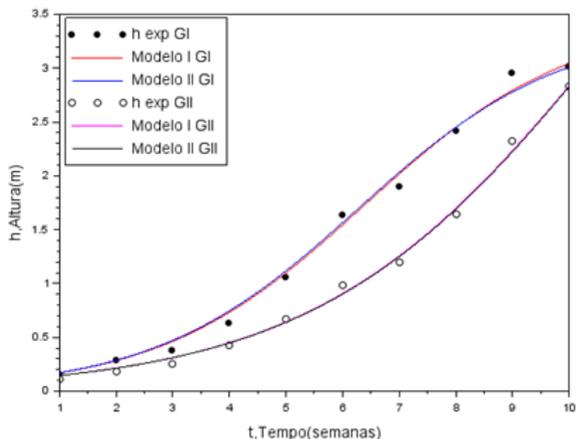
O MPR também gera soluções sub ótimas, visto que os conjuntos $\mathbf{r} = [r_{min}, r_{max}]$ e $\mathbf{K} = [K_{min}, K_{max}]$ são discretos, podendo existir soluções melhores (ótimas) entre os valores vizinhos desses conjuntos.

Os algoritmos dos Métodos I e II foram implementados no programa SCILAB, ambos com $m = 30$ estimativas para os parâmetros r e K , executados com um processador Intel Core i7 – 8550U, CPU 1.8 GHz, Memória RAM 8 GB. Os tempos de processamento (médias de cinco execuções) foram de 6,276 s e 1,018 s, para os Modelos I e II, respectivamente. Os valores dos parâmetros, pontos, coeficientes de determinação e tempos de processamento são apresentados na Tabela 2 e as curvas obtidas com os parâmetros r e K para ambos os modelos, na Figura 2.

Tabela 2 - Resultados dos dois métodos, para $m = 30$ estimativas de \mathbf{r} e \mathbf{k}

Método I						
Grupos	r	K	Ponto A	Ponto B	R^2	Tempo (s)
Grupo I	0,55	3,46	5	8	0,9938	6,2768
Grupo II	0,39	6,53	1	10	0,9966	
Método II						
Grupos	r	K	R^2		Tempo (s)	
Grupo I	0,557	3,387	0,992799		1,018	
Grupo II	0,3884	6,632	0,996537			

Fonte: os autores

Figura 2 - Dados experimentais e curvas ajustados pelos dois modelos

Fonte: os autores

As fases de desenvolvimento mencionadas em Peixoto e Peixoto (2009) podem ser identificadas, aproximadamente, na curva do Grupo I. A fase de juvenilidade se situa entre P_1 e P_4 . Um ponto de inflexão entre P_4 e P_5 indica a transição para a fase de maturação até P_9 , seguida pelas fases de reprodução e senescência a partir de P_9 , momento em que a taxa de crescimento tende a zero e a altura h ao valor do parâmetro K . As fases de germinação e morte não foram monitoradas, já que o objetivo foi descrever o crescimento da planta. O ajuste da curva do Grupo II ficou um pouco prejudicado, porque o monitoramento foi interrompido ainda na fase de juvenilidade. Os dados em que a taxa de crescimento é mínima, são importantes para caracterizar a senescência. Isso explica o formato não bem definido da curva logística, sem ponto de inflexão, e altura máxima K maior do que 6 m , incomum para um pé de milho. Além disso, a ausência desses dados, faz parecer que o ciclo de vida das plantas do Grupo II é mais longo do que o ciclo das plantas do Grupo I, pela análise da Figura 2. Porém, deve-se considerar que os valores de K não são os mesmos, portanto, não se pode inferir

conclusões sobre o ciclo de vida das plantas dos dois grupos apenas a partir da comparação dos coeficientes r .

A diferença entre as alturas das plantas dos dois grupos a cada semana, deve-se no mínimo, a dois fatores. Primeiro, a altura média inicial ($t = 0$ semanas) das plantas do Grupo I é cerca de 36% maior do que a do Grupo II, justamente porque as plantas foram semeadas cinco dias antes. Segundo, de acordo com as informações dos agricultores, o solo da lavoura do primeiro grupo é mais fértil do que o solo do segundo.

Os métodos mostraram-se equivalentes em precisão para os dados de ambos os grupos, como pode-se observar na Tabela 2, tanto nos valores de r e k , cuja diferença é de 0,002 (1,27 %) e 0,073 (2,15 %), respectivamente, como no coeficiente de determinação, com diferenças de 0,0011 (0,11%).

Tabela 3 - Análise da variação dos parâmetros e do ajuste

Estimativas	10	20	30	40	50	60	70	100	
Método I	r	0,55	0,55	0,5333	0,54	0,54	0,5416	0,5357	0,54
	k	3,55	3,375	3,55	3,4625	3,48	3,4916	3,55	3,515
	R^2	0,9931	0,9924	0,9934	0,9930	0,9934	0,9939	0,9939	0,9940
Método II	r	0,55	0,5675	0,5716	0,5512	0,57	0,5775	0,5728	0,557
	k	3,42	3,345	3,33	3,4125	3,336	3,31	3,3257	3,387
	R^2	0,9934	0,9896	0,9907	0,9933	0,9901	0,9876	0,9892	0,9927

Fonte: os autores

Para analisar a dependência dos valores de r , k e R^2 com o número de estimativas (m), os algoritmos foram executados, como teste, para $m=10,20,30,40,50,60,70,100$ apenas para o Grupo I. Como pode-se observar na Tabela 3, as variações de r e k são de ordem 10^{-2} e 10^{-1} , respectivamente. Porém, essas variações não são uniformemente convergentes com o aumento do número das estimativas. As variações de R^2 são da ordem 10^{-2} e apresentam uma ligeira convergência, já que esse coeficiente aumenta com o aumento de m , mesmo que não

uniforme. Essa é uma característica do MPR, pois cada alteração em m implica novos parâmetros sub-ótimos, não necessariamente mais eficientes do que aqueles obtidos com números de estimativas menores.

Para os dados de crescimento do milho analisados, um ajuste com correlação 0,99 representa com eficiência a tendência dos dados (considerando o reduzido valor do desvio padrão na Tabela 1), sendo que essa precisão já é obtida com 10 estimativas, conforme observa-se na Tabela 3.

A Experiência de Modelar em Cálculo Numérico

A modelagem, neste trabalho, foi entendida como um processo de investigação de um fenômeno real, implementado paralelamente ao desenvolvimento dos conteúdos clássicos de Cálculo Numérico²⁵. Essa opção de ensino viabiliza, ao mesmo tempo, a formação matemática – estudos bibliográficos e listas de exercícios – e as possibilidades de significação de muitos dos conceitos estudados em problemas práticos, procedimentos e métodos próprios da Matemática Aplicada. No início do semestre, em duplas ou individualmente, os alunos escolhem um tema de seu interesse para pesquisar. A inserção no tema, mediante revisão bibliográfica e coleta de dados ocorre aos poucos, definindo direções de forma dialogada, até o momento de organizar as informações disponíveis, fazer as abstrações necessárias e propor os modelos matemáticos. Nesse estágio, os conteúdos começam a fazer sentido nos procedimentos da investigação e os cálculos exigem a substituição da calculadora pela implementação computacional dos algoritmos numéricos. A inserção dos licenciados nesse tipo de experiências é um dos objetivos, no nosso entendimento, do emprego da modelagem matemática na Licenciatura.

²⁵ O segundo autor vem utilizando esse formato de modelagem em diferentes componentes curriculares no Ensino Superior. Em Borges (2016) são apresentados e discutidos enfoques específicos de Cálculo Numérico, dentre eles o que emprega a modelagem.

Todas as etapas de uma investigação em modelagem foram desenvolvidas no estudo do crescimento do milho. A escolha do milho como tema, permitiu um olhar diferente para o cotidiano, além de trazer informações da prática familiar agrícola para a interpretação dos resultados. A experiência de planejar, coletar e interpretar dados é uma prática inexistente na formação matemática dos cursos da Licenciatura. A noção de precisão (ou imprecisão) das medidas, porém, é fundamental para entender a dispersão de pontos em dados experimentais. A provocação para a criação de métodos numéricos, por mais simples que sejam, também não é comum nas aulas baseadas em livros didáticos. O Método I foi cogitado durante a experiência e implementado mais tarde, por ocasião do presente trabalho. É um registro de atividade de modelagem que gera problemas de interesse matemático.

O modelo logístico já era conhecido. Assim, a investigação ficou inicialmente no entendimento de um método não linear de ajuste e, depois, na criação de outro método, o Método I, ambos não previstos nas ementas de Cálculo Numérico da Licenciatura de Matemática. A extrapolação dos conteúdos mínimos é comum na modelagem e provoca a curiosidade dos alunos que se interessam pela Matemática e suas aplicações. Da mesma forma, a implementação computacional dos algoritmos é uma dificuldade que, com o apoio do professor, pode ser superada e iniciar os alunos em programação. As propriedades de desafiar o aluno para tarefas de criação e resolução de problemas de ordem prática empregando conceitos e procedimentos matemáticos é, talvez, a contribuição mais significativa da modelagem para a formação do professor.

Considerações Finais

Sobre o modelo e os métodos numéricos

O modelo logístico possibilitou, além de uma excelente correlação com os dados, a visualização das fases do desenvolvimento na curva de crescimento, cumprindo, assim, uma função, além de

técnica, didática, uma vez que aplica os conhecimentos de derivada na análise da curva, associados aos significados biológicos.

O MPR evita os problemas de convergência característicos dos modelos descendentes do Método de Newton. É competitivo até quatro parâmetros e pode ser aplicado como localizador inicial de soluções, para depois aplicar outros métodos não lineares. Por outro lado, sua precisão pode ser melhorada considerando os intervalos $[r_{min}, r_{max}]$ e $[K_{min}, K_{max}]$ cada vez menores e/ou aumentando o número de estimativas m . Neste trabalho, esse refinamento foi executado manualmente, mas pode ser acrescentado no programa.

Os parâmetros estimados pelos dois métodos são muito próximos. Isso, contudo, não indica que os métodos sejam igualmente eficientes. A regularidade dos dados contribui para a eficiência do Método I, visto que quase todos os pontos estão muito próximos da curva ideal. Para distribuições com maior dispersão e poucos pontos, é improvável que a hipótese básica do Método I seja satisfeita. O Método II não tem esse condicionante, por isso mostra-se mais apropriado para resolver o problema de ajuste de curvas, do que o Método I. Além disso, é mais rápido.

Sobre o problema de modelagem: resultados e precisão

O cuidado com a coleta de dados é fundamental para que seja possível fazer a análise do período completo de crescimento. O prolongamento de duas semanas no final da coleta foi insuficiente, visto que a carência de mais dados sobre a fase de senescência levou a um valor incomum para a altura máxima K , mais de $6 m$ para um pé de milho. Esse fato, antes de ser uma crítica, é ilustrativo sobre a importância da atividade prática com os recursos do Cálculo Numérico. É um caso onde a experiência ensina por si só.

Sobre a modelagem no ensino do Cálculo Numérico

A modelagem matemática faz a transição entre a realidade e a linguagem matemática, sendo que o seu emprego nas aulas de um curso de Licenciatura proporciona envolvimento e traz sentido para a aprendizagem. A possibilidade de escolher o tema de pesquisa fornece ao licenciado a oportunidade de interagir com o seu contexto, levantando situações e problemas atinentes a ele. Na coleta de dados experimentais, a imersão no estudo torna-se ainda mais significativa, pois o desafio de realizar as observações periodicamente com a maior precisão possível, elaborar um modelo e analisar sua coerência com a realidade, exige comprometimento e dedicação. Nesse tipo de atividade é despertado maior interesse pelos conteúdos de Cálculo Numérico, uma vez que o licenciado sente a necessidade de implementá-los. Além disso, resulta em aprendizados, muito além do estudo dos conceitos, propriedades e técnicas, uma vez que oferece ao licenciado a possibilidade de novos olhares para a aprendizagem da matemática, considerando a futura prática em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, C.L.T. *et al.* **Modelagem do crescimento de culturas: aplicações à cultura do milho**. Sete Lagoas: Embrapa Milho e Sorgo, 2009.

BORGES, P.A.P; CERVI, A.; VIONE, M.T. Determinação dos parâmetros da equação de Van Genuchten usando problema inverso em um problema de evaporação. In: Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, 8, Pelotas: SBMAC. **Anais [...]**. Pelotas: RS, Universidade Federal de Pelotas, 2008, p. 23-30.

BORGES, P.A.P. Diferenciação de enfoques no ensino de Cálculo Numérico. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: SBEM, 2016, v. 6. p. 1-12.

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

COSTA, L.C.; BARROS, A.H.C. Desenvolvimento e teste de um modelo de simulação de crescimento, desenvolvimento e rendimento da cultura do milho. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, Santa Maria, v.9, n.1, p.75-82, 2001.

LYRA, G.B.; SOUZA, J.L.; TEODORO, I.; MOURA FILHO, G. Modelo de crescimento logístico e exponencial para o milho BR 106, em três épocas de plantio. **Revista Brasileira de Milho e Sorgo**, v.7, p. 211-230, 2008.

LUCCHESI, A. A. Utilização da análise de crescimento vegetal. **Anais da Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz** [online], 1984, v. 41, n. 1, p. 181-202.

MAGALHÃES, P.C.; DURÃES, F.O.M. **Fisiologia da produção de milho**. Sete Lagoas: Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento, 2006. 10p. (Circular Técnica, 76).

PEIXOTO, C.P.; PEIXOTO, M. F.S.P. Dinâmica do Crescimento Vegetal: Princípios Básicos. *In*: CARVALHO, C. A. L. de. *et al.* **Tópicos em Ciências Agrárias**. Cruz das Almas, BA: Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Agrárias, Ambientais e Biológicas, 2009. p. 36-53.

PES, L.Z.; ARENHARDT, M.H. **Fisiologia Vegetal**. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, Colégio Politécnico, Rede e-Tec Brasil, 2015.

ZILL, D.G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 10. ed. São Paulo. Cengage Learning, 2018.



edifapes