

# SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS EM DUTOS COM REDUÇÃO BRUSCA DE SEÇÃO

Numerical simulation of pipeline with flow in sudden reduction section

SCOTTON, J. W.  
PEDROSO, C. A.

Recebimento: 12/07/2013 - Aceite: 02/08/2013

**RESUMO:** Neste artigo apresentam-se simulações numéricas de escoamentos incompressíveis de fluidos Newtonianos entre placas paralelas e em dutos com redução brusca de seção. Escoamentos laminares e turbulentos são avaliados. Em todas as simulações, os objetos de análise foram a distribuição de velocidade e as linhas de corrente, obtidas pela resolução das equações diferenciais parciais de Navier-Stokes, cujas derivadas foram aproximadas pelo Método dos Volumes Finitos. O aplicativo comercial Ansys CFX é usado para realizar as simulações e o modelo  $k-\epsilon$  é utilizado para representar a turbulência do escoamento. Nos casos em que as equações apresentam solução analítica (escoamentos laminares entre placas paralelas), os resultados obtidos numericamente foram comparados com os resultados analíticos e com Schlichting (1968). Nos demais (escoamentos turbulentos em dutos com redução brusca de seção), os resultados numéricos foram comparados com Fox e McDonald (1995). Em todos os casos, as comparações se mostraram satisfatórias.

**Palavras-chave:** Simulações Numéricas. Navier-Stokes. Volumes Finitos. Mecânica de Fluidos.

**ABSTRACT:** In this paper numerical simulations of Newtonian incompressible flows between parallel plates and in ducts with sudden reduction section are presented. Laminar and turbulent flows are evaluated. In every simulation, the aim of analysis were the velocity distribution and streamlines obtained by solving the partial differential equations of Navier-Stokes, whose derivatives were approximated by Finite Volume Method. The commercial software Ansys CFX was used to perform the simulations and the  $k-\epsilon$  model was used to predict the turbulence of flow. In cases where the equations presented analytical solution (laminar flow between parallel plates), the nume-

rical results were compared with the analytical results and with Schlichting (1968). In the other (turbulent flow in ducts with sudden reduction section), the numerical results were compared with Fox and McDonald (1995). In all cases, comparisons proved satisfactory.

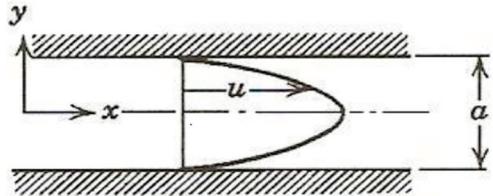
**Keywords:** Numerical Simulations. Navier-Stokes. Finite Volume. Fluid Mechanics.

## Introdução

A mecânica dos fluidos é um ramo em franco desenvolvimento, fato que se deve principalmente ao grande avanço da informática nas últimas décadas no que tange ao processamento e ao armazenamento de dados. Um fator decisivo neste sentido concentra-se no fato de que os problemas que envolvem escoamentos de fluidos, em geral, não possuem solução analítica e, por isso, demandam a utilização de recursos computacionais para resolvê-los por meio de técnicas numéricas.

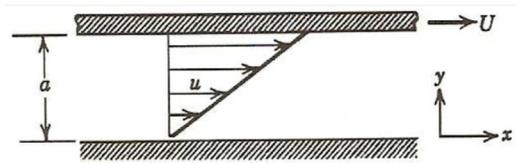
Como exemplos clássicos de soluções de escoamentos internos na mecânica dos fluidos, é possível citar os escoamentos de Poiseuille e de Couette (FOX e McDONALD, 1995), os quais consistem em escoamentos de fluidos entre duas placas paralelas, sendo que, no primeiro caso, ambas as placas são estacionárias e, no segundo, a placa inferior é estacionária enquanto a superior está em movimento constante na direção  $x$ . O escoamento de Couette mais simples é aquele em que o gradiente de pressão é nulo ( $\Delta p=0$ ), ou seja, aquele em que a única força responsável pelo movimento do fluido é a força de arrasto propulsionada pelo movimento da placa superior. Desse modo, para a situação descrita, tem-se que a derivada parcial da pressão em relação a  $x$  é nula. As Figuras 1 e 2 ilustram, respectivamente, os perfis de velocidade dos escoamentos de Poiseuille e de Couette.

**Figura 1** – Perfil de velocidade do escoamento de Poiseuille



Fonte: Fox e McDonald (1995, p. 258)

**Figura 2** – Perfil de velocidade do escoamento de Couette

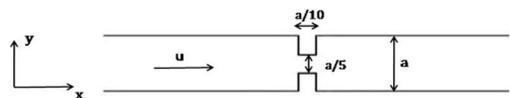


Fonte: Fox e McDonald (1995, p.262)

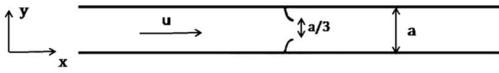
Como se pode observar na Fig. 1, o perfil de velocidade do escoamento de Poiseuille é parabólico, sendo a velocidade máxima em  $y=a/2$  e mínima em  $y=0$  e  $y=a$ . Já no escoamento de Couette, conforme Fig. 2, o perfil de velocidade é linear, sendo a velocidade máxima em  $y=a$  e mínima em  $y=0$ .

Os planos físicos dos escoamentos em dutos com redução brusca de seção estão ilustrados nas Figuras 3 e 4.

**Figura 3** – Ilustração do plano físico do caso A de escoamento em duto com redução brusca de seção.



**Figura 4** – Ilustração do plano físico do caso B de escoamento em duto com redução brusca de seção.



Muitos são os autores que apresentam soluções experimentais (BAGARELLO, 1995; CARDOSO; FRIZZONE; REZENDE, 2008), analíticas (FOX e McDONALD, 1995) e numéricas (TRINDADE, 2007; FALUHELYI, LEVY, 2006) para os escoamentos descritos acima. Assim sendo, a finalidade deste trabalho é apresentar resultados numéricos obtidos usando o pacote de dinâmica dos fluidos computacional Ansys CFX para escoamentos clássicos como o de Poiseuille e de Couette, além de escoamentos em dutos com redução brusca de seção, os quais podem ser modelados pelas equações de Navier-Stokes e pelo modelo k-ε de turbulência.

Inicialmente, apresentam-se aqui o modelo matemático e o método pelo qual as derivadas parciais das equações foram aproximadas, discutindo-se a viabilidade do método iterativo de Runge-Kutta. Os resultados obtidos, através das técnicas numéricas mencionadas, compreendem:

- O perfil parabólico de velocidade no escoamento de Poiseuille;
- O perfil linear de velocidade no escoamento de Couette para diferentes gradientes de pressão;
- As diferentes configurações de escoamentos em dutos com redução brusca de seção, analisando a formação de recirculações e o comportamento dos campos de velocidade.

Destaca-se, ainda, que as simulações foram realizadas com o auxílio de um computador com processador Intel (R) Core (TM) i5-2500, 3,30 GHz, memória RAM de 12 GB, memória de armazenamento de 1 TB e sistema operacional de 64 bits e o tempo de processamento para as simulações para o

critério de convergência pré-determinado foi em média de 0,038 horas.

## Equações governantes

As equações empregadas na realização das simulações pertencem a um grupo de equações diferenciais parciais conhecido como equações de Navier-Stokes, o qual modela o escoamento de fluidos Newtonianos, permitindo a obtenção dos campos de pressão e de velocidades, a vazão e as linhas de corrente como a sua resolução, principal objetivo deste trabalho.

Embora em situações simplificadas essas equações possam ser resolvidas analiticamente, na maioria das vezes se faz necessário o uso de técnicas numéricas, através das quais faz-se uma aproximação da equação diferencial, aceitando-se ter a solução para um número discreto de pontos no domínio, com uma determinada margem de erro, sendo que, quanto maior for o número de pontos, mais próxima da solução exata estará a solução aproximada, ou numérica, desde que feitas as devidas considerações para o escoamento (MALISKA, 2004).

Na seqüência, são apresentadas as equações da conservação da quantidade de movimento para escoamentos laminares e compressíveis que, juntamente com a equação da conservação da massa, formam o conjunto de equações conhecido com equações de Navier-Stokes,

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (1)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (2)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] \quad (3)$$

que podem ser simplificadas para escoamentos incompressíveis com viscosidade constante, tornando-se (FOX e MCDONALD, 1995)

(4)

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

(5)

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

(6)

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Sendo  $\rho$  a massa específica do fluido,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  as componentes do vetor velocidade, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente,  $g_x$ ,  $g_y$ ,  $g_z$  as componentes da força de corpo (gravidade) nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente,  $\mu$  a viscosidade do fluido e  $p$  a componente escalar da pressão.

Para modelar a turbulência do escoamento, as médias de Reynolds RANS – Reynolds Average Navier-Stokes Equations (FREIRE et al., 2002) são empregadas ao conjunto de equações acima, as quais geram uma indeterminação no sistema pelo surgimento de novos termos, os quais compõem o chamado tensor de Reynolds e que precisam de uma modelagem adequada para a sua solução. Assim sendo, além das equações de Navier-Stokes, que foram empregadas em todas as simulações, nos casos de escoamentos em dutos com redução brusca de seção, foi utilizado, também, o modelo de turbulência  $k$ - $\epsilon$  (LAUDER e SPALDING, 1972), onde  $k$  representa a energia cinética turbulenta e  $\epsilon$  a sua taxa de dissipação, sendo que os valores de  $k$  e  $\epsilon$  vem das equações de transporte para a energia cinética de turbulência e taxa de dissipação de turbulência.

Desse modo, segundo Khatchatourian e Heuert (2007), a equação da conservação da

massa para escoamentos compressíveis, em notação de índices, se torna:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho U) = 0 \quad (7)$$

e a equação da conservação da quantidade de movimentos, também na notação de índices, fica

(8)

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \nabla(\rho U \otimes U) - \nabla(\mu_{\text{eff}} \nabla U) = \nabla p' + \nabla(\mu_{\text{eff}} \nabla U)^T + B$$

onde:

$$p' = p + \frac{2}{3} \rho k \quad (9)$$

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t \quad (10)$$

(11)

$$\mu_t = C_\mu \rho \cdot \frac{k^2}{\epsilon}$$

sendo  $B$  a soma das forças do corpo,  $\mu_{\text{eff}}$  a viscosidade efetiva definida como a soma da viscosidade do fluido com a viscosidade turbulenta,  $\mu_t$ , obtida com o modelo de turbulência, propriedade do escoamento,  $p$  a pressão modificada e  $C_\mu$  a constante do modelo de turbulência.

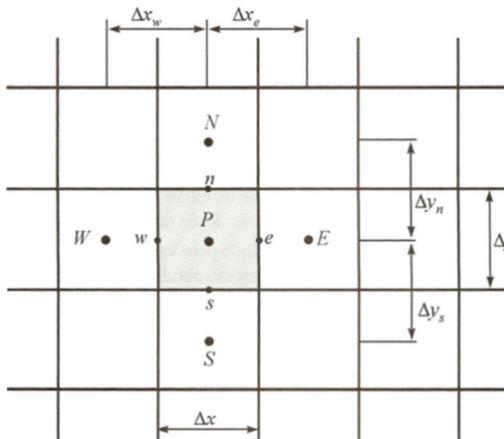
## Método dos Volumes Finitos e Runge-Kutta

As derivadas das equações utilizadas foram aproximadas pelo método dos Volumes Finitos e o código computacional Ansys CFX foi adotado para a solução dos problemas. O método dos volumes finitos consiste na divisão da região de interesse em pequenas sub-regiões denominadas volumes de controle, sendo que cada uma das equações de conservação é resolvida para cada um destes volumes a cada iteração. Segundo Maliska

(2004, p. 28), há duas maneiras de se obter as equações aproximadas pelo método dos volumes finitos: uma que consiste na realização de balanços da propriedade em questão nos volumes elementares (volumes finitos); e, outra, que se baseia na integração das equações na forma conservativa sobre o volume elementar no espaço e no tempo.

Dessa forma, nesta pesquisa, as equações foram discretizadas e resolvidas iterativamente para cada volume de controle, resultando numa aproximação do valor de cada variável para cada ponto específico do domínio, sendo possível, dessa maneira, observar o comportamento do escoamento em cada ponto da região de interesse. Com o objetivo de facilitar a visualização, a Fig. 5 ilustra em apenas 2D um volume finito centrado no ponto  $P$  e seus volumes vizinhos centrados nos pontos  $N$ ,  $S$ ,  $W$  e  $E$ . Mas salienta-se que as simulações são em 3D.

Figura 5 – Volume elementar 2D e seus vizinhos.



Fonte: Maliska (2004, p.46)

O software Ansys CFX pode utilizar, para resolver as equações da conservação da Quantidade de Movimento nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , o método explícito de Runge-Kutta. O uso de coeficientes alfa possibilita obter soluções com maior precisão temporal, atingindo as características apropriadas de amortecimento

do erro da solução. O esquema abaixo apresentado por Bortoli (1999) ilustra, de maneira simplificada, o método de Runge-Kutta de três estágios:

$$W_{i,j}^{(1)} = W_{i,j}^{(0)} - \alpha^{(1)} \Delta t R_{i,j}^{(0)} \quad (12)$$

$$W_{i,j}^{(2)} = W_{i,j}^{(0)} - \alpha^{(2)} \Delta t R_{i,j}^{(1)} \quad (13)$$

$$W_{i,j}^{(3)} = W_{i,j}^{(0)} - \alpha^{(3)} \Delta t R_{i,j}^{(2)} \quad (14)$$

Onde:

$$R_{i,j} = Q_{i,j} - D_{i,j} \quad (15)$$

sendo  $Q_{i,j}$  os termos convectivos,  $D_{i,j}$  os termos dissipativos e  $\Delta t$  o espaçamento temporal.

## Condições de contorno e malha computacional

A condição de contorno empregada foi a condição de contorno de Dirichlet, a qual permite definir uma determinada propriedade física para cada parte do domínio. Na simulação do escoamento de Poiseuille (entre placas paralelas estacionárias), consideraram-se ambas as placas (superior e inferior) com velocidades  $u$ ,  $v$  e  $w$  nulas, condição de não deslizamento, na entrada prescreve-se a pressão de 4 Pa e à saída pressão de 2 Pa, sendo a diferença de pressão entre entrada e saída a única responsável pelo movimento do fluido. Na simulação do escoamento de Couette (entre placas paralelas, uma em movimento constante em relação à outra), considerou-se a placa inferior com velocidades  $u$ ,  $v$  e  $w$  nulas, não deslizamento, sendo que para a placa superior prescreveu-se uma velocidade

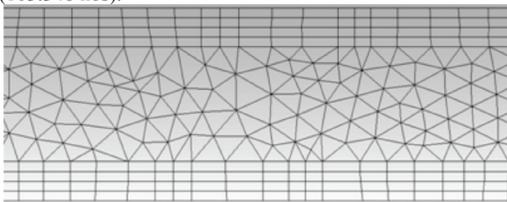
$u$  constante, igual a 1 m/s, mantendo-se  $v$  e  $w$  como nulas e, tanto a entrada quanto a saída, com pressão fixa, igual a 2 Pa, sendo agora a velocidade  $u$  da placa superior a única responsável pelo movimento do fluido. Nas simulações de escoamentos em dutos com redução de seção, em todos os casos, considerou-se a mesma configuração do escoamento de Poiseuille.

**Quadro 1** – Dimensões gerais das malhas não-estruturadas geradas para as simulações.

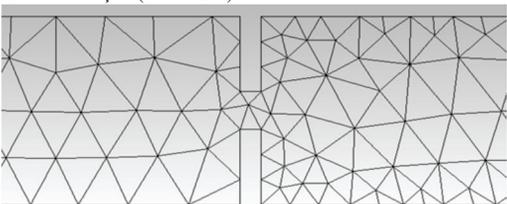
Escoamento	Comprimento em x (cm)	Comprimento em y (cm)	Comprimento em z (cm)
Poiseuille e Couette	100	1	1
Em dutos com redução brusca de seção	40	2	1

As malhas computacionais não-estruturadas empregadas nas simulações possuem as dimensões apresentadas no Quadro 1 e as Figuras. 6, 7, 8 e 9 apresentam visualizações parciais das malhas geradas para as simulações.

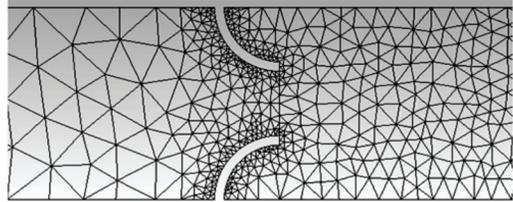
**Figura 6** – Escoamentos de Poiseuille e de Couette (103.348 nós).



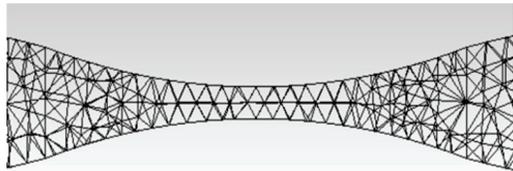
**Figura 7** – Caso A de escoamento em duto com redução brusca de seção (3.866 nós).



**Figura 8** – Caso B de escoamento em duto com redução brusca de seção (24.795 nós).



**Figura 9** – Caso C de escoamento em duto com redução brusca de seção (4.248 nós).



Em todos os casos o comprimento na direção  $z$  é fisicamente desprezível, não havendo interferência das superfícies laterais aos escoamentos, uma vez que no Ansys CFX são configuradas condições de simetria a estas fronteiras.

### Perfil parabólico e perfil linear

O perfil de velocidade do escoamento de Poiseuille obtido analiticamente é o apresentado por Fox e McDonald (1995, p. 257):

$$u = \frac{a^2}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \left[ \left( \frac{y}{a} \right)^2 - \left( \frac{y}{a} \right) \right] \tag{16}$$

Sendo a distância entre as placas,  $\mu$  a viscosidade do fluido,  $p$  a pressão e  $y$  a distância com relação a placa inferior. Destaca-se que, para a derivada da pressão em relação a  $x$ , foi utilizada a diferença de pressão entre a entrada e a saída, ou seja, 2 Pa.

Já o perfil de velocidade do escoamento de Couette é apresentado por Pedroso (2001),

$$u = U \cdot \frac{y}{b} \quad (17)$$

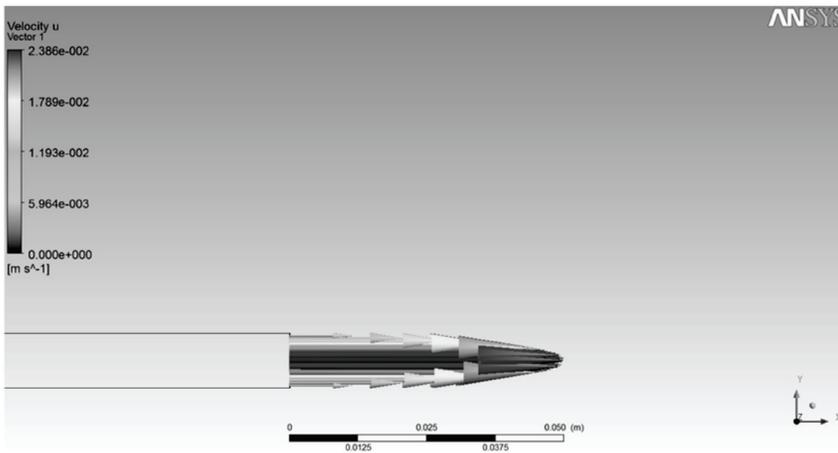
onde  $U$  é a velocidade da placa superior.

As soluções analíticas das equações (16) e (17) foram utilizadas como comparação com os resultados numéricos obtidos com as simulações dos escoamentos de Poiseuille e de Couette, visando validá-los.

## Resultados Numéricos

A primeira simulação realizada foi do escoamento de Poiseuille de um fluido newtoniano (água), com as condições de contorno já mencionadas anteriormente, sendo movimentado pela diferença de pressão entre entrada e a saída do domínio, de 2 Pa, obtendo o campo de vetores velocidade na saída do domínio apresentado na Fig. 10.

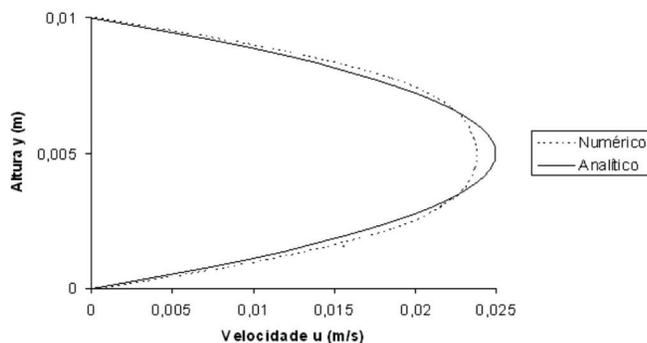
**Figura 10** - Campo de vetores velocidade obtido na simulação do escoamento de Poiseuille.



Comparando o perfil obtido numericamente com o analítico da Eq. (16), percebe-se

uma boa aproximação entre ambos, conforme ilustra a Fig. 11.

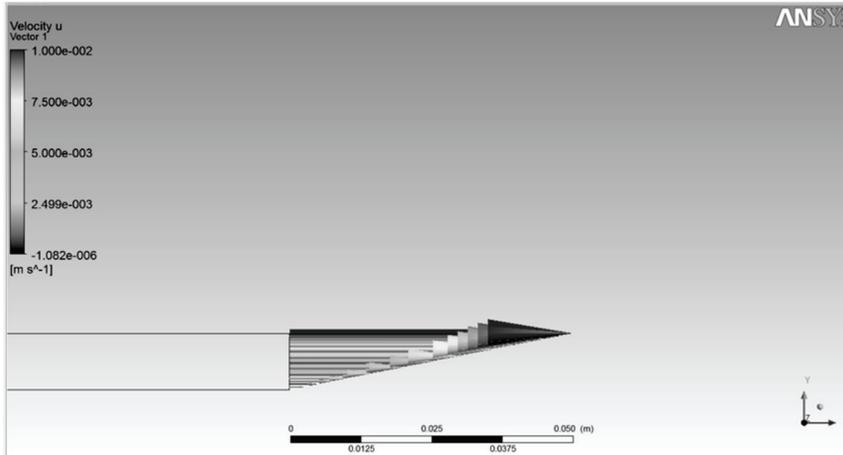
**Figura 11** – Comparação dos perfis parabólicos de velocidade: analítico dado por Fox e McDonald (1995) e numérico obtido no presente trabalho.



Utilizando a mesma malha empregada na simulação do escoamento de Poiseuille, fez-se a simulação do escoamento de Couette, porém, desta vez, utilizando como fluido o ar a 25°C, com  $\Delta p = 0$ , sendo a velocidade

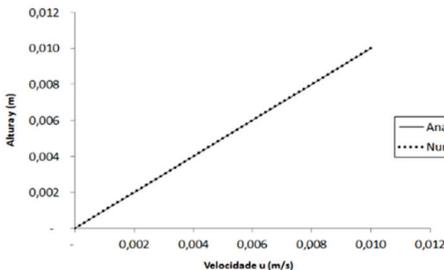
da placa superior,  $u$ , igual a 0,01 m/s, a única responsável pelo movimento do fluido, conforme já dito acima. A Fig. 12 ilustra o campo de vetores velocidade na saída do domínio.

Figura 12 - Campo de vetores velocidade obtido na simulação do escoamento de Couette.



Comparando o perfil numérico obtido com o linear dado pela Eq. (17) percebe-se que os resultados encontrados são muito próximos. A Fig. 13 ilustra a comparação entre as duas soluções.

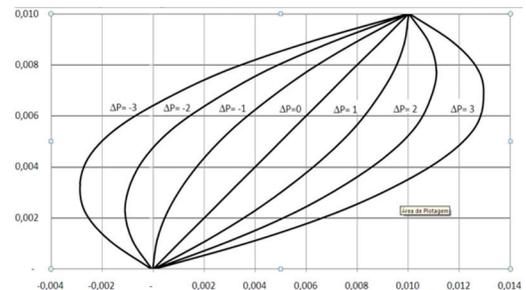
Figura 13 – Comparação dos perfis lineares de velocidade: analítico dado por Schlichting (1968) e numérico obtido.



Verificada a aproximação entre os resultados analítico e numérico na simulação do escoamento de Couette para  $\Delta p = 0$ , realizaram-se outras simulações para diferentes variações de pressão entre a entrada e saída do domínio, ou seja, para  $\Delta p = -3$ ,  $\Delta p = -2$ ,

$\Delta p = -1$ ,  $\Delta p = 1$ ,  $\Delta p = 2$ , e  $\Delta p = 3$ , sendo obtidos os perfis de velocidade ilustrados na Fig. 14, percebendo-se que, para  $\Delta p > 0$ , a pressão decresce na direção da placa que está em movimento e que, para  $\Delta p < 0$ , a pressão cresce na direção da placa que está em movimento.

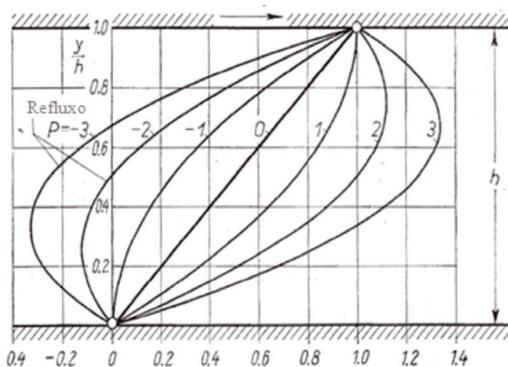
Figura 14 – Perfis de velocidade obtidos nas simulações do escoamento de Couette para diferentes gradientes de pressão.



Os perfis obtidos numericamente foram comparados aos resultados analíticos de

Schlichting (1968), os quais estão ilustrados na Fig. 15. Observando-os, nota-se claramente uma semelhança entre os perfis conseguidos nas simulações e os encontrados na literatura, o que valida os resultados obtidos.

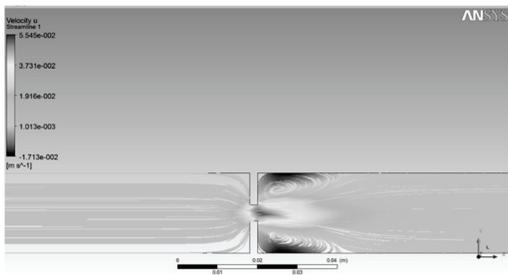
**Figura 15** – Perfis de velocidade do escoamento de Couette para diferentes gradientes adimensionais de pressão.



**Fonte:** Schlichting (1968).

Após as validações dos resultados encontrados das simulações dos escoamentos entre as placas paralelas, partiu-se para as simulações dos casos A e B de escoamentos em dutos com redução brusca de seção com base nas malhas apresentadas anteriormente. A Fig. 17 mostra as linhas de corrente obtidas, próximas à redução de seção, para o caso A.

**Figura 16** – Linhas de corrente obtidas na simulação do caso A de escoamento em duto com redução de seção. (Imagem ampliada próximo ao estreitamento)

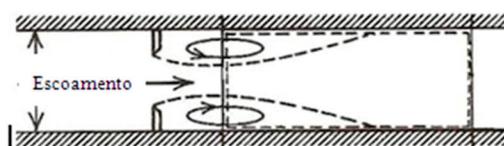


Na Fig. 16 observa-se que, após o estreitamento, formaram-se duas recirculações, simétricas nas direções das placas superior

e inferior por não haver influência de forças externas como a gravidade, por exemplo. Além disso, pode-se notar que é imediatamente após o estreitamento o ponto onde a velocidade é máxima e a pressão, consequentemente, mínima.

Comparando as linhas de corrente obtidas nas simulações com as apresentadas por Fox e McDonald, Fig. 17, percebe-se que os resultados encontrados são muito parecidos.

**Figura 17** – Escoamento em duto com placa de orifício.



**Fonte:** Fox e McDonald (1995, p. 308)

Após a validação do caso A, partiu-se para a simulação do caso B, onde as linhas de corrente podem ser vistas na Fig. 18, novamente com ampliação próxima à redução de seção. Neste caso, nota-se que também ocorreu a formação de dois vórtices simétricos após a redução, mas que a velocidade, depois de ser elevada, se manteve assim num espaço maior do domínio. A Fig. 19 apresenta as recirculações e o sentido das linhas de corrente dadas por Fox e McDonald. Comparando as duas figuras, pode-se notar que as linhas obtidas são semelhantes.

**Figura 18** – Linhas de corrente obtidas na simulação do caso B de escoamento em duto com redução de seção. (Imagem ampliada próximo ao estreitamento)

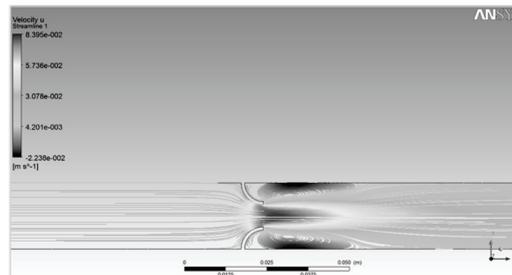
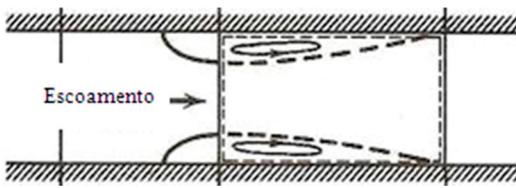


Figura 19 – Instalação de um bocal medidor num tubo.



Fonte: Fox e McDonald (1995, p. 325)

## Conclusão

Utilizando o pacote de dinâmica dos fluidos computacional Ansys CFX, foram realizadas simulações numéricas de escoamentos laminares entre placas paralelas e turbulentos em dutos com redução brusca de seção. A solução do problema consiste em resolver um conjunto de equações diferenciais parciais chamadas equações de Navier-Stokes, empregando como técnica de aproximação das derivadas, o Método dos Volumes Finitos.

Todos os resultados obtidos numericamente foram comparados com outros encontrados na literatura, buscando parâmetros para validação dos mesmos. Desse modo, como comparativo ao escoamento de Poiseuille e aos dois casos de fluxos em dutos com redução brusca de seção, utilizou-se Fox e

McDonald (1995), e para o escoamento de Couette e Schlichting (1968). As comparações destes resultados indicaram coerência em relação aos fenômenos físicos considerados, no que tange aos perfis de velocidade e formações de vórtices, que foram os objetos de análise desta pesquisa.

O emprego de métodos numéricos no estudo de situações de escoamentos em que não há solução analítica é um fato que tem crescido bastante, sobretudo com a evolução da informática. Os computadores, com melhor capacidade de processamento e armazenamento, permitiram o desenvolvimento de algoritmos capazes de simular situações complexas de escoamentos com rapidez e precisão significativas, e custo baixo, tornando-se uma ferramenta muito útil a engenheiros.

As técnicas numéricas apresentadas podem servir de base para simulações de situações mais complexas e realísticas de escoamentos como, por exemplo, o emprego de medidores de vazão de Orifício, Bocal e Venturi (FOX e MCDONALD, 1995, p. 303) e até mesmo para o fluxo de sangue através de uma artéria carótida com placa de ateroma, isto é, com acúmulo de gordura.

## AUTORES

Jaque Willian Scotton - Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões - URI Erechim, Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática. E-mail: jaquewillian@gmail.com

Clemerson Alberi Pedroso - Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões - URI Erechim, Professor Tempo Integral. E-mail: cpedoso@uricer.edu.br

## REFERÊNCIAS

BAGARELLO, V. et al. Experimental study on flow-resistance law for small-diameter plastic pipes. **J. Irrig. Drain. E.** - ASCE, New York, v. 121, n. 5, p. 313-316, 1995.

- BORTOLI, Á. L. de. **Introdução à Dinâmica de Fluidos Computacional**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2000.
- CARDOSO, G.G.G.; FRIZZONE, J. A.; REZENDE, R.; Fator de atrito em tubos de polietileno de pequenos diâmetros. **Acta Scientiarum. Agronomy (UEM)**. 30.3 (July 2008): p299 Disponível em: <http://go.galegroup.com/ps/i.do?id=GALE%7CA193756604&v=2.1&u=capex58&it=r&p=AONE&sw=w>. Acesso em: 10 set. 2013
- FALUHELYI, P.; LEVY NETO, F.; Simulação numérica do comportamento mecânico de tubos poliméricos de parede fina submetidos à pressão interna. **Revista Matéria**. Rio de Janeiro, v. 11, n. 3, Jul/Set. 2006. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S1517-70762006000300020>. Acesso em: 10 set. 2013.
- FOX, Robert W.; McDONALD, A. T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995.
- FREIRE, A. P. S.; MENUT P. P. M.; SU. J.. **Turbulência**. Vol. 1, Rio de Janeiro: ABCM, 2002.
- KHATCHATOURIAN, O.; HEUERT, J. **Interação entre Jatos Transversais e Fluxo Principal: Simulação e Análise Comparativa de Modelos de Turbulência**. XXX CNMAC de Florianópolis, 2007. Disponível em: [http://www.sbmec.org.br/eventos/cnmac/xxx\\_cnmac/PDF/649.pdf](http://www.sbmec.org.br/eventos/cnmac/xxx_cnmac/PDF/649.pdf). Acesso em: 15 de dez. 2011.
- LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. **Mathematical models of turbulence**. New York: Academic Press, 1972.
- MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional: Fundamentos e Coordenadas Generalizadas**. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- PEDROSO, C. A. **Simulação de fluxos bidimensionais, laminares e incompressíveis entre superfícies móveis**. 2001. xiv, 96 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, Porto Alegre, 2001.
- SCHLICHTING, H. **Boundary Layer Theory**. New York: McGraw-Hill Books, 1968.
- TRINDADE, V. B. Simulação computacional da vida útil de tubos metálicos usados em temperaturas elevadas. **Exacta**, São Paulo, v. 5, n. 1, p.105-111 jan./jun. 2007.

