

APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: DESVENDANDO DIFICULDADES DE CÁLCULO DOS ALUNOS

Learning mathematics: unveiling students' calculation difficulties

ZATTI, F.
AGRANIONI, N. T.
ENRICONE, J. R. B.

Recebimento: 16/10/2010 – Aceite: 16/12/2010

RESUMO: O artigo refere-se a uma pesquisa qualitativa que objetivou investigar aspectos da aprendizagem do cálculo matemático das quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) em 34 alunos da 5ª série do Ensino Fundamental de 17 escolas públicas da cidade de Erechim, RS. Para tanto, foi aplicado o subteste de aritmética do TDE (Teste de Desempenho Escolar), de Lílian Milnitsky Stein, observando-se os padrões de erros cometidos pelos alunos. Observou-se que o maior número de erros ocorreu nas operações de divisão e subtração, seguidas da multiplicação e da adição. As categorias emergentes apontaram erros como procedimentos incorretos no desenvolvimento do algoritmo; reprodução errada da proposta; erro de contagem; cálculo mental; e erros estranhos. Os dados demonstram que os alunos participantes apresentaram dificuldades esperadas para alunos de séries iniciais (1ª à 4ª séries), no âmbito das quatro operações básicas, sendo que boa parte dos erros apresentados podem ser atribuídos à não compreensão do algoritmo ou a dificuldades atencionais e/ou de memorização. Muitos erros cometidos pelos alunos também podem ser devidos ao descompasso entre o tempo em que esses algoritmos são ensinados na escola e o tempo próprio de cada criança para a compreensão dos mesmos.

Palavras-chave: Aprendizagem da Matemática. Análise de Erros. Dificuldade de Aprendizagem.

ABSTRACT: This article describes a qualitative study that investigated which aspects of mathematical calculation learning of the four fundamental operations (addition, subtraction, multiplication and division) are impaired and which ones are preserved in 34 fifth-grade students from 17 public schools

in the city of Erechim / RS. To this end, we applied the arithmetic subtest of the TEA (Test of Educational Achievement), proposed by Lily Milnitsky Stein, we also observed the patterns of errors made by the students. It was observed that the greatest number of errors occurred in the operations of division (59.4%) and subtraction (37.5%), followed by multiplication (27.9%) and addition (15.7%). The emerging categories pointed out errors such as: incorrect procedures in algorithm development, incorrect reproduction of the proposal, counting error, mental calculation, strange errors and no answer. The data showed that the participants had difficulties to deal with the four basic operations, which were expected from students of lower grades (1st to 4th grades). Yet, many of the errors made can be attributed to the misunderstanding of the algorithm or to attention difficulties and/or memorization. It was also realized that many mistakes made by students may be due to the mismatch between the time when these algorithms are taught in school and the proper time for each child to better understand them.

Keywords: Learning mathematics. Error analysis. Learning disabilities

A aprendizagem da Matemática é tida, juntamente com a leitura e a escrita, como uma das aprendizagens fundamentais da Educação Básica, dado o caráter instrumental dos seus conteúdos (ORRANTIA, 2006). É preciso que as crianças aprendam sobre Matemática para entender o mundo ao seu redor, pois, além de matéria escolar, é parte importante de suas vidas cotidianas. Entretanto, como disciplina escolar, observa-se que a Matemática pode ser fonte de dificuldades para muitos alunos. Dentre os motivos que contribuem para isso, incluem-se particularidades que podem dificultar sua aprendizagem.

Na 5ª série do Ensino Fundamental, observa-se que as dificuldades em Matemática geralmente tendem a se acentuar, já que, até o nível anterior, os conteúdos relacionavam-se ao domínio dos algoritmos básicos das quatro operações, sendo mais enfatizadas as questões relacionadas à escrita e leitura. Tornando-se disciplina específica no currículo, as dificuldades passam a ser mais sistemáticas, de modo que os índices de reprovação costumam aumentar.

Neste estudo, objetivou-se caracterizar aspectos da aprendizagem matemática de alunos de 5ª série do Ensino Fundamental em escolas públicas estaduais do município de Erechim, RS, considerados como tendo dificuldades de aprendizagem nessa disciplina. Foram analisados, mais especificamente, aspectos relativos à aprendizagem de cálculos, buscando identificar dificuldades e erros comuns na realização dos mesmos, por meio dos algoritmos convencionais das quatro operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão. Inicialmente, são apresentados autores que contribuíram para o aprofundamento do tema e do método de pesquisa, seguidos da apresentação e discussão dos dados obtidos.

1 Revisão Teórica

As dificuldades de aprendizagem em Matemática podem estar relacionadas a diferentes fatores. Fonseca (1995, p. 217) afirma que são vários os motivos relacionados com as dificuldades para aprender essa

matéria escolar, dentre eles: “[...] ausência de fundamentos matemáticos, falta de aptidão, problemas emocionais, ensino inapropriado, inteligência geral, capacidades especiais, facilitação verbal e/ou variáveis psiconeuro-lógicas”. Já para Rivière (1995, p. 145), uma das causas que tornam a Matemática difícil para um número tão grande de crianças pode consistir no fato de que ela “[...] implica um alto grau de integração de habilidades cognitivas que não são específicas da matemática, mas intervêm em sua aprendizagem”.

Teixeira (2004) destaca algumas características dos conceitos matemáticos que podem ser responsáveis pelas dificuldades encontradas na aprendizagem dessa disciplina, dentre elas: 1) a aprendizagem de conceitos matemáticos é de natureza lógico-matemática e não empírica; 2) os conceitos matemáticos se baseiam na capacidade geral da inteligência humana de fazer relações de natureza necessária e não contingente; 3) os conceitos matemáticos se formam por dedução e não por indução; 4) os conhecimentos matemáticos são abstratos, referindo-se a regularidades distantes do diretamente observável; 5) a generalização de regras, categorias ou estratégias demanda conhecer condições para sua aplicação; 6) os conceitos são expressos em uma linguagem específica. Ainda podem estar envolvidos o próprio ensino da Matemática e as características dos processos cognitivos dos alunos.

As representações negativas, associadas às dificuldades que se manifestam no contexto do ensino e da aprendizagem da Matemática, podem dificultar ainda mais a apropriação dos conceitos matemáticos, pois os fatores emocionais podem exercer significativa influência na aprendizagem, podendo diminuir o desempenho cognitivo e impossibilitar a reflexão objetiva (PAROLIN; SALVADOR, 2002). Desse modo, as vivências relacionadas à Matemática podem ser ansiogênicas para muitos alunos, originando

aversão a essa matéria e dificultando cada vez mais a aprendizagem.

Teixeira (2006) aponta que a análise de erros é um método de investigação que tem colaborado significativamente na compreensão da natureza dos erros referentes ao ensino e aprendizagem da Matemática. Essa tem sido proposta por Cury (2007) ao afirmar que um texto matemático, produzido por um aluno, pode ser analisado, embasado em procedimentos sistemáticos para inferir conhecimentos sobre as formas com que ele construiu um determinado saber matemático. Conforme a autora, ao analisar as respostas dos alunos, o fundamental não é o acerto ou o erro em si, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que podem indicar dificuldades de aprendizagem. Nesse sentido, a análise dos erros é uma alternativa que pode contribuir no estudo das dificuldades encontradas na aprendizagem da Matemática, buscando-se conhecer as dificuldades para então criar alternativas que visem à sua superação.

2 Método

A pesquisa foi realizada com 34 alunos da 5ª série do Ensino Fundamental de 17 escolas da Rede pública estadual de Erechim, RS. Fizeram parte da população envolvida dois educandos de cada escola, indicados pelo professor de Matemática, a partir do seguinte critério: alunos com dificuldades de aprendizagem na Matemática sem diagnóstico de déficit cognitivo.

A coleta de dados foi realizada por meio da aplicação do subteste de Aritmética do TDE (Teste de Desempenho Escolar), de Lillian Milnitsky Stein (1994), instrumento psicométrico que avalia capacidades fundamentais para o desempenho escolar em escrita, aritmética e leitura. A aplicação foi feita individualmente, pelas pesquisadoras,

com duração aproximada de 30 minutos. Os sujeitos participantes foram identificados em ordem numérica (P1 - participante 1) e os cálculos de acordo com sua classificação e numeração no TDE.

A análise das informações obtidas se baseia na metodologia da análise de erros conforme Cury (2007). A pesquisa caracteriza-se por um delineamento qualitativo, com utilização de Estatística descritiva. Na identificação e análise dos erros nos cálculos de adição, subtração, multiplicação e divisão emergiram os padrões de erros considerados no trabalho como categorias de análise.

3 Resultados

A maior parte dos erros ocorreu nas operações de divisão (59,4%) e subtração (37,5%), seguidas pela multiplicação (27,9%) e pela adição (15,7%). As categorias emergentes da análise (padrões de erros) relativas à adição, subtração, divisão e multiplicação, são apresentadas a seguir.

3.1 Adição

Em relação aos cálculos de adição, foram identificados nove padrões de erros: erros de contagem (37,5%); procedimentos incorretos no desenvolvimento do algoritmo (15,6%); reprodução errada da operação proposta (15,6%); cálculo mental (12,5%); erros estranhos (6,2%); autocorreção (3,1%) e montagem do algoritmo convencional (3,1%). Em 6,2% dos cálculos propostos, não houve respostas por parte dos alunos.

3.1.1 Procedimentos incorretos no desenvolvimento do algoritmo

Trata-se de erros no desenvolvimento do algoritmo da adição. Ocorreram de formas

diferentes, conforme as subcategorias abaixo:

Erros no “vai um”: Refere-se aos erros cometidos ao se efetuar uma operação de adição em que o uso do “vai um” se faz necessário, termo normalmente usado nas escolas para nomear o transporte ou a reserva, ou seja, o valor a ser acrescentado a uma ordem superior resultante da formação de dez unidades na ordem inferior. Ocorreram de duas maneiras: o aluno agrega irregularmente o número transportado (Exemplo 1) ou esquece de acrescentar o número transportado (Exemplo 2):

$$\begin{array}{r} 75 \\ + 8 \\ \hline 93 \end{array}$$

(Ex. 1 - cálculo 8/P30)

$$1230 + 150 + 1620 = \boxed{29.00}$$

(Ex. 2 - cálculo 15/P28)

Omissão de coluna: ao efetuar o cálculo, o aluno processa incorretamente o algoritmo, não adicionando os valores correspondentes à coluna (ordem decimal) à qual a reserva deveria ser acrescentada.

$$\begin{array}{r} 452 \\ 137 \\ + 245 \\ \hline 934 \end{array}$$

(cálculo 13/P07)

Conforme o exemplo, o aluno omite a soma dos valores da ordem das centenas, apenas considerando o valor correspondente à reserva.

3.1.2 Reprodução errada da operação proposta

Trata-se de erros devidos, possivelmente, a distrações ou não compreensão do significado dos sinais indicativos dos cálculos a serem realizados. Ocorreram de duas formas:

Troca de operações: o aluno subtrai os valores relativos à adição proposta, ao invés de somar.

$$\begin{array}{r} 6 \\ - 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

(cálculo 03/P09)

Cópia incorreta de valores: o aluno errou por copiar errado o valor equivalente a 1.230 ao “armar” o cálculo.

$$1230 + 150 + 1620 = 3890$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ + 150 \\ + 1620 \\ \hline 1890 \end{array}$$

(cálculo 15/P10)

3.1.3 Erros de contagem

Trata-se de erros devidos à contagem incorreta dos valores referentes às casas decimais.

$$\begin{array}{r} 17 \\ 21 \\ + 40 \\ \hline 78 \end{array}$$

(cálculo 07/ P04)

No exemplo, o aluno erra ao efetuar a contagem referente às dezenas, uma vez que a adição $1 + 2 + 4$ totaliza 7 ao invés de 9.

3.1.4 Cálculo mental

O aluno efetua o cálculo mentalmente, sem armar a conta, ocorrendo erro em algum momento.

$$1230 + 150 + 1620 = 2200$$

(cálculo 15/P14)

No exemplo, o erro ocorreu na soma dos valores das colunas da centena e do milhar, possivelmente envolvendo erros no “vai um” ou na contagem.

3.1.5 Montagem do algoritmo convencional

Ao organizar os valores das unidades, dezenas, centenas ou milhares na forma do algoritmo tradicional, não são colocados verticalmente um sobre o outro, provocando a adição indevida de valores não correspondentes às mesmas casas decimais.

$$1230 + 150 + 1620 = 4250$$

$$\begin{array}{r} 1230 \\ + 150 \\ + 1620 \\ \hline 4250 \end{array}$$

(cálculo 15/P23)

3.1.6 Erros estranhos

Engloba os erros que não foram categorizados, uma vez que não foi possível

identificar o procedimento realizado pelo aluno ao desenvolver o cálculo e a origem do erro.

3.1.7 Autocorreção

Foi possível observar, ainda, procedimentos de autocorreção entre os cálculos realizados pelos alunos como no exemplo, abaixo, em que o próprio aluno percebe o erro que cometeu e o corrige, substituindo o valor obtido anteriormente.

$$\begin{array}{r} 17 \\ 21 \\ + 40 \\ \hline 768 \end{array}$$

(cálculo 07/P18)

3.2 Subtração

Os erros identificados nos cálculos de subtração foram categorizados em: procedimentos incorretos no desenvolvimento do algoritmo (44,2%); erros de contagem (20,6%); reprodução errada da operação proposta (10,8%); erros estranhos (8,8%); colocação indevida de ponto e vírgula (3,9%); cálculo mental (3,9%); reprodução do minuendo ou subtraendo no resultado (1,96%); e construção de estratégia alternativa de cálculo (0,98%). Houve ausência de respostas em 4,9% dos cálculos propostos.

3.2.1 Procedimentos incorretos no desenvolvimento do algoritmo

Trata-se de erros no desenvolvimento do algoritmo da subtração. Ocorreram de formas diferentes, conforme as subcategorias abaixo:

Erros no “empréstimo”: Refere-se aos erros cometidos ao efetuar uma operação de subtração em que se faz necessário “pedir

emprestado”, termo normalmente usado nas escolas para nomear o valor a ser subtraído de uma ordem superior equivalente a dez unidades na ordem inferior, a serem acrescidas aos valores nela já existentes.

- O aluno esquece que “emprestou”

$$\begin{array}{r} 43 \\ - 18 \\ \hline 35 \end{array}$$

(cálculo 09/P 06).

$$\begin{array}{r} 91 \\ 401 \\ - 74 \\ \hline 427 \end{array}$$

(cálculo 14/P29)

$$\begin{array}{r} 3415 \\ - 1630 \\ \hline 1885 \end{array}$$

(cálculo 16/P28)

O aluno realiza corretamente o “empréstimo”, agrega o valor “emprestado” à ordem inferior e subtrai corretamente os valores. No entanto, ao subtrair os valores da coluna que concedeu o “empréstimo”, esquece de subtrair o valor emprestado no minuendo.

- O aluno evita o empréstimo, subtraindo o minuendo do subtraendo.

$$\begin{array}{r} 3415 \\ - 1630 \\ \hline 1225 \end{array}$$

(cálculo 16/P10)

$$\begin{array}{r} 401 \\ - 74 \\ \hline 423 \end{array}$$

(cálculo 14/P10)

Ao verificar a impossibilidade de subtrair um valor maior de um valor menor, o aluno inverte os valores e procede à subtração.

- O aluno erra no empréstimo devido a zeros no minuendo

$$\begin{array}{r} 401 \\ - 74 \\ \hline 327 \end{array}$$

(cálculo 14/P 25)

$$\begin{array}{r} 19^0 \\ - 3 \\ \hline 04 \end{array}$$

(cálculo 05/P 10)

Omissão da ordem ao subtrair

R\$ 1000,00 - R\$ 945,50 =	0765,50
----------------------------	---------

$$\begin{array}{r} 7000,000 \\ - 945,50 \\ \hline 0765,50 \end{array}$$

(cálculo 21/ P 11)

$$\begin{array}{r} 3415 \\ - 1630 \\ \hline 285 \end{array}$$

(cálculo 16/P 26)

No primeiro cálculo, $401 - 74 =$, o aluno realiza o empréstimo, mas ignora o zero na ordem da dezena e subtrai 1 da ordem da centena. Em outras palavras, “pede emprestado” direto para o 4 (centena) e não para o 0 (dezena), desconsiderando os passos do algoritmo relativo para as trocas de 1 centena por 10 dezenas e de 1 dezena por 10 unidades. Ao subtrair os valores correspondentes às dezenas, na impossibilidade de tirar 7 de 0, inverte os valores e subtrai 0 de 7, obtendo o valor 7.

No segundo exemplo, $1000,00 - 945,50 =$, o aluno “pede emprestado” para as ordens superiores, mas ignora completamente o mecanismo do empréstimo, ao considerar todos os valores como 10, evidenciando a não compreensão do algoritmo da subtração, quando ocorrem zeros no minuendo.

Aplicação indevida de processos automatizados. No exemplo, o aluno realiza o empréstimo, embora sem necessidade. Ignora as nove unidades já existentes na ordem das unidades, não agregando as “emprestadas” a elas, e subtrai 3, apenas, de dez.

No cálculo acima, o aluno subtrai corretamente as unidades e as dezenas, procedendo devidamente ao empréstimo da centena para a dezena. Não realiza a subtração dos valores da centena, passando de imediato à subtração dos milhares.

3.2.2 Reprodução errada da operação proposta

Erros devidos, possivelmente, a distrações ou não compreensão do significado dos sinais indicativos dos cálculos a serem realizados. No primeiro exemplo, o aluno adiciona ao invés de subtrair e, no segundo, inverte minuendo e subtraendo ao armar o algoritmo convencional.

R\$ 1000,00 - R\$ 945,50 =	194,550
----------------------------	---------

$$\begin{array}{r} 1000,00 \\ - 945,50 \\ \hline 194,50 \end{array}$$

(cálculo 21/P 10)

R\$ 1000,00 - R\$ 945,50 =

$$\begin{array}{r} 1000,00 \\ - 945,50 \\ \hline 54,50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 845,50 \\ - 1000,00 \\ \hline 845,50 \end{array}$$

(cálculo 21/P 31)

realiza corretamente o cálculo, evidenciando conhecer o algoritmo, mas erra na contagem.

$$\begin{array}{r} 43 \\ - 18 \\ \hline 24 \end{array}$$

(cálculo 09/P23)

3.2.3 Reprodução do minuendo ou do subtraendo no resultado

O aluno reproduz o subtraendo ou o minuendo na resolução do cálculo, sem a preocupação com a realização do cálculo.

R\$ 1000,00 - R\$ 945,50 =

$$\begin{array}{r} 1000,00 \\ - 945,50 \\ \hline 1000,00 \end{array}$$

(cálculo 21/P 01)

3.2.5 Colocação indevida de ponto e vírgula

O ponto e/ou a vírgula são colocados indevidamente no resultado do cálculo.

R\$ 1000,00 - R\$ 945,50 =

(cálculo 21/P 02)

No exemplo, o aluno confunde-se na identificação do resultado. Talvez por ter adicionado ao invés de subtrair e ao se dar conta de que o resultado da subtração não pode ser maior do que mil, coloca o ponto entre quatro e cinco na tentativa de “ajustar” o resultado para cento e noventa e quatro.

R\$ 1000,00 - R\$ 945,50 =

$$\begin{array}{r} 1000,00 \\ - 945,50 \\ \hline 1000,00 \end{array}$$

X

$$\begin{array}{r} 1000,00 \\ - 945,50 \\ \hline 1000,00 \end{array}$$

(cálculo 21/P 07)

No exemplo acima (cálculo 21/P 01) o aluno reproduz o minuendo no resultado. Talvez perceba que há algo estranho no resultado, fazendo novamente o cálculo e reproduzindo o subtraendo no resultado.

3.2.6 Cálculo mental

Ao realizar o cálculo mentalmente, sem armar o algoritmo convencional, o aluno obtém resultados errôneos. No exemplo abaixo, provavelmente encontra “quanto falta” para completar mil, a partir de novecentos e quarenta e cinco, não considerando a necessidade de descontar os centavos do valor obtido.

3.2.4 Erros de contagem

Erros resultantes da contagem incorreta na obtenção do resultado do cálculo. O aluno

R\$ 1000,00 - R\$ 945,50 =

(cálculo 21/P 13)

3.2.7 Construção de estratégia alternativa de cálculo

Realização do cálculo por caminhos diferentes dos tradicionais. O aluno adapta seus conhecimentos de cálculo às situações e resolve os cálculos através da aplicação desses conhecimentos que envolvem desde os algoritmos tradicionais até estratégias de cálculo mental. Esses procedimentos nem sempre conduzem ao acerto do cálculo.

$$\begin{array}{r} \text{R\$ } 1000,00 \\ - \text{R\$ } 945,50 \\ \hline \text{55,50} \end{array}$$

(cálculo 21/P 34)

No cálculo acima, o aluno ignorou os centavos, preocupando-se em subtrair o equivalente aos reais inteiros, inicialmente. Ao final, ao invés de subtrair os centavos do valor obtido, somou-os.

3.2.8. Erros estranhos

Erros que não se enquadram nas categorias estabelecidas na pesquisa e de difícil compreensão.

3.3 Divisão

Emergiram nove categorias na análise dos erros de divisão: reprodução errada da operação proposta (24,8%); não domínio do algoritmo (21%); erros de tabuada (6,9%); erros estranhos (6,9%); desistência (1%); cálculo mental (2%); reprodução errada da resposta (1%); e erro de subtração durante o cálculo (1%). Houve ausência de respostas em 34,6% dos cálculos propostos.

3.3.1 Erros de tabuada

Os alunos dominam o algoritmo da divisão e erram na tabuada. No exemplo que

segue, o erro foi consequência da não memorização da tabuada. O aluno equivocou-se ao considerar $6 \times 5 = 35$, ao invés de 30, e também ao desconsiderar que $6 \times 6 = 36$, o que provocou o erro.

$$\begin{array}{r} 968 \div 6 = \\ \hline 6 \overline{) 968} \\ \underline{6} \\ 36 \\ \underline{33} \\ 018 \\ \underline{018} \\ 000 \end{array}$$

(cálculo 19 / P24)

3.3.2 Reprodução errada da operação proposta

O aluno realiza outros procedimentos de cálculo ao invés da divisão, ou utiliza incorretamente os dados fornecidos no cálculo. Foram identificadas algumas subcategorias:

- a) O aluno inverte dividendo e divisor

$$4 : 5 = \boxed{1} \quad \begin{array}{r} 415 \\ 364 \\ 41 \\ \hline \end{array}$$

(cálculo 30/P 22)

Ao montar o cálculo, considera que não é possível realizar a divisão de um número menor por um número maior. Por essa razão, inverte os valores do dividendo e do divisor, buscando aproximar a situação de uma outra que lhe é mais familiar, realizando o cálculo com facilidade. Nesse cálculo também recorre a outras estratégias diante da dificuldade na resolução, como as que seguem.

b) Atribui zero como resultado

(cálculo 30/P 19)

Embora avalie corretamente que não é possível formar grupos de cinco unidades com quatro unidades, indicando essa impossibilidade com zero no quociente, o aluno não avança no sentido de considerar a possibilidade de trabalhar com casas decimais, obtendo um resultado não inteiro. O zero utilizado pelo aluno, nesse caso, também pode ser indicativo de uma suposta impossibilidade de realizar o cálculo.

c) Ao invés de dividir, o aluno multiplica ou adiciona.

(cálculo 30/P 23)

(cálculo 30/P 06)

Esses erros também podem ser devidos ao fato de o aluno ignorar ou desconhecer o sinal de divisão, o que provoca a opção pela realização de outro cálculo: multiplicação ou soma, como nos exemplos.

3.3.3 Reprodução errada da resposta

O aluno acerta o cálculo e indica o resultado incorretamente, por desatenção ou

não interpretação do significado da operação.

(cálculo 18/P 27)

3.3.4 Não domínio do algoritmo

Erros no procedimento de cálculo devido à não compreensão do algoritmo ou à não automatização do processo. No cálculo abaixo, o aluno ignora o divisor 65 e realiza a divisão como se estivesse dividindo apenas por 6. Não subtrai o valor obtido, indicando resto zero. “Abaixa” o 3. Multiplica 1 x 65 e obtém 6. Subtrai 6 de 3 e obtém 0. Demonstra não dominar vários passos do algoritmo.

(cálculo 22/P 10)

Alguns desses erros envolvem o zero no quociente como no exemplo, abaixo, em que se verifica um erro bastante comum na divisão: após “abaixar” um número, diante do fato de o valor a ser dividido ser menor que o divisor, o aluno “abaixa” outro número, sem colocar o zero no quociente.

(cálculo 22/ P01)

3.3.5 Erro de subtração durante o cálculo

O aluno domina o procedimento da divisão, mas erra na subtração.

(cálculo 18/P 15)

3.3.6 Erros estranhos

Erros que não foram categorizados, uma vez que não foi possível identificar o procedimento realizado pelo aluno ao desenvolver o cálculo, nem a origem do erro.

3.3.7 Desistência

O aluno considerou que não era possível resolver o cálculo.

(cálculo 30/P 12)

3.3.8 Cálculo mental

O aluno fez o cálculo mentalmente e reproduziu o resultado obtido, nem sempre obtendo sucesso.

3.4 Multiplicação

Nos cálculos de multiplicação, os erros encontrados estão inseridos nas seguintes

categorias: erros de tabuada (36,8%); não domínio do algoritmo (23,7%); esquecimento do “vai um” (15,7%); cálculo mental (2,6%); e erros estranhos (2,6%). Em 18,6% dos cálculos propostos, houve ausência de respostas.

3.4.1 Erros de tabuada

Os alunos dominam o algoritmo da multiplicação e erram apenas na tabuada.

(cálculo 20/P29)

3.4.2 Não domínio do algoritmo

O aluno comete erros no procedimento de cálculo devido à não compreensão do algoritmo ou à não automatização do processo. No primeiro exemplo abaixo, o aluno erra na tabuada e não multiplica o 9 do 96 pelo 8 do 823. No exemplo 2, o aluno não termina o procedimento de cálculo.

(Ex. 1: cálculo 20/ P29)

$$823 \times 96 =$$

(Ex. 2: cálculo 20/P 09)

3.4.3 Esquecimento do “vai um”

O aluno erra devido ao esquecimento ou acréscimo indevido da reserva (“vai um”) ao efetuar o cálculo nas adições e na multiplicação dos algarismos dos fatores.

Na adição: no exemplo, o aluno acrescenta a reserva indevidamente ao 7 referente à dezena de milhar.

(cálculo 20/ P 17)

b) Na multiplicação: o aluno, além de errar na tabuada ao multiplicar 9×8 , não acrescenta a reserva ao multiplicar 6×8 .

(cálculo 20 / P15)

3.4.4 Cálculo mental

O aluno fez o cálculo mentalmente e reproduz o resultado obtido.

3.4.5 Erros estranhos

Erros que não foram categorizados, uma vez que não foi possível identificar o procedimento realizado pelo aluno ao desenvolver o cálculo, nem a origem do erro.

4 Discussão dos resultados

A partir dos dados apresentados, observou-se que a maior parte de erros ocorreu nas operações de divisão e subtração, seguidas pela multiplicação e pela adição. Os algoritmos de divisão e subtração, portanto, foram significativamente mais difíceis para os alunos participantes da pesquisa.

A maior parte dos erros de divisão inseriu-se nas categorias reprodução errada da operação proposta e não domínio do algoritmo. Um aspecto que chama a atenção é a ausência de respostas em 29,8% dos cálculos propostos. O cálculo 30 ($4:5=$) e o cálculo 22 ($6630:65=$) apresentaram um maior percentual de erros. Esses cálculos são trabalhados na 4ª série, mas são mais enfatizados na 5ª série. O cálculo 30 envolve divisão de números decimais, em que o dividendo é menor que o divisor, o que torna o quociente menor que 1, ou seja, 0,8. Na maior parte dos erros, nesse cálculo, houve ausência de respostas, e a categoria em que se enquadra a maior parte dos mesmos é a “reprodução errada da operação proposta”. O fato de o dividendo ser menor que o divisor pode ter sido um fator de estranheza aos alunos, ainda não muito familiarizados com operações com números decimais, o que levou grande parte deles a

considerar o cálculo impossível ou a invertê-lo, tornando-o mais familiar: $5:4=$. Outros consideraram um possível erro na proposta da operação, resolvendo o problema através da soma, subtração ou multiplicação do dividendo e do divisor. Alguns atribuíram zero como resposta, o que pode ser considerado um sinal de impossibilidade ou uma aproximação com o conceito de número decimal. Verifica-se que o aluno constrói um procedimento alternativo de resolução, mesmo que não corresponda ao solicitado.

O cálculo 22, cujo quociente é 102, trata-se de um dos “casos” da divisão em que o resto da divisão, juntamente com o valor “baixado”, produz um valor, a ser dividido, menor que o divisor, o que provoca a necessidade de colocar zero no quociente. Muitos alunos “esquecem” desse zero e “baixam” o próximo número, prosseguindo com o processo. A dificuldade pode estar em perceber a necessidade e o sentido desse zero no quociente do cálculo e/ou também na memorização do algoritmo da divisão.

O cálculo 19 ($986:6=164$) apresentou um percentual de erros próximo ao de acertos. Trata-se de um cálculo mais familiar para alunos de 5ª série, pois normalmente é trabalhado a partir da 3ª série do Ensino Fundamental, não envolvendo particularidades ou dificuldades específicas no algoritmo como zeros no quociente, por exemplo. Porém, os resultados permitem considerar que se trata, também, de um cálculo que oferece dificuldades aos alunos, uma vez que foi grande o índice de ausência de respostas, e os erros observados nesse cálculo enquadram-se de modo mais significativo na categoria não domínio do algoritmo.

Foi significativa a ausência de respostas para todos os cálculos de todas as operações, com exceção do cálculo 11 ($6:3=$), fato que pode estar indicando a presença de uma falsa ideia de incapacidade de resolução, já que o

que se evidencia é que os alunos nem sequer tentaram resolvê-los ou tentaram e desistiram. Quando a operação é muito difícil, ou a possibilidade de fracasso é muito grande, ocorre a desistência, fato que é comumente observado nas escolas, reforçando a possibilidade de existência de um sentimento de incapacidade para a Matemática, nutrido por muitos alunos. Parolin e Salvador (2002), ao discutirem aspectos relacionados a dificuldades em Matemática, referem que muitas pessoas nem chegam a tentar aprender ou resolver uma situação matemática, visto que se encontram em um estado emocional de negação. Dessa forma, percebe-se que é criada uma ideia de incapacidade para a aprendizagem, rotulando a Matemática como algo muito difícil ou até mesmo impossível de ser aprendido.

Como foi mencionado, tanto os cálculos 30 e 22 quanto o cálculo 19 fazem parte dos conteúdos trabalhados na 4ª e na 5ª séries do Ensino Fundamental, o que permite considerar que já tenham sido trabalhados com os alunos pesquisados. Se se considerarem as categorias em que se enquadram os erros nesses cálculos, pode-se pensar que o tempo de interação dos alunos com esses conhecimentos talvez ainda não tenha sido suficiente para as aprendizagens. Esse fato chama atenção para as características e singularidades dos processos cognitivos de cada aluno. A aprendizagem da Matemática, assim como de outros conceitos, envolve processos que, apesar de inerentes ao funcionamento da inteligência, desenvolvem-se conforme as solicitações ambientais, o que faz com que existam diferenças individuais na compreensão de novos conceitos, tornando necessário, portanto, levar em consideração os esquemas disponíveis, assim como o ritmo de aprendizagem de cada um (TEIXEIRA, 2004).

Quanto aos erros de subtração, a maior parte deles deveu-se a procedimentos incorretos no desenvolvimento do algoritmo, em es-

pecial erros envolvendo o empréstimo, o que é comumente observado pelos professores. Em 9,8 % desses procedimentos incorretos estavam envolvidos cálculos com zeros no minuendo, o que envolve propriedades do sistema de numeração decimal. Grande parte dos erros, relativos aos procedimentos incorretos no desenvolvimento do algoritmo da adição, deveu-se a problemas com a reserva: esquecimento do número a ser transportado e agregação irregular do número transportado. A compreensão do empréstimo, no algoritmo convencional da subtração, requer o conhecimento de propriedades do sistema de numeração decimal, em especial os agrupamentos de base 10 e o valor posicional. O desconhecimento das mesmas pode ser um dos fatores que conduzem a erros, embora os mesmos também possam ser atribuídos a problemas de outra natureza. Estudos de Gómez-Granell (1996) evidenciam que boa parte dos erros que os alunos cometem ocorre devido a o ensino ter sido baseado mais na aplicação de regras do que na compreensão do significado, uma vez que aplicam as regras sem serem capazes de conectá-las com o conhecimento procedimental ou conceitual.

Constatou-se que 6,9 % dos alunos evitaram o empréstimo, subtraindo minuendo do subtraendo, subvertendo as regras do algoritmo e recorrendo a um conhecimento já estruturado que possibilitasse a sua resolução. Nesses casos, os alunos criaram, portanto, uma forma própria de resolver o cálculo. Além disso, observou-se que 6,9 % dos procedimentos incorretos envolveram a aplicação indevida de processos automatizados. Nesse tipo de erro, o aluno evidencia dominar alguns passos do algoritmo, “esquecendo” outros, o que também pode ser atribuído à não compreensão do algoritmo, ou a dificuldades atencionais e de memorização.

De acordo com o enfoque cognitivo, pode ocorrer que alguns indivíduos tenham dificuldades para manter em sua memória in-

formações numéricas, mesmo não tendo tais dificuldades para conteúdos de outra natureza como, por exemplo, verbais e visuais. Sendo assim, supõe-se que para as crianças com dificuldades na aprendizagem de Matemática, seria mais difícil manter dados numéricos na memória de trabalho. Além disso, problemas de atenção seletiva também podem se revelar nas dificuldades de aprendizagem de Matemática (RIVIÈRE, 1995). Crianças, com problemas de atenção, frequentemente têm dificuldades na organização de estruturas hierárquicas de atividades ou processos mentais, o que prejudica o desempenho em atividades relacionadas à Matemática.

É importante refletir que dificuldades relacionadas aos primeiros estágios das operações básicas (contagem, adição e subtração) podem resultar em problemas futuros, relacionados tanto com aspectos cognitivos quanto com a motivação, já que a criança não obtém satisfatoriamente noções de habilidades básicas que serão importantes posteriormente. Além disso, ao perceber seu insatisfatório grau de êxito no desempenho de atividades matemáticas, pode se desmotivar e perder o interesse.

Chama a atenção o fato de que 20,6% dos erros em subtração são de contagem, habilidade sobre a qual, supostamente, uma criança de 5ª série deveria ter domínio. Embora a adição tenha sido a operação em que menos se observaram erros (nas categorias erro de contagem, procedimentos incorretos no algoritmo e reprodução errada da proposta), os erros de contagem foram altamente significativos nessa operação, do mesmo modo que na subtração. Esse dado reforça as afirmações de Orrantía (2006), quando ele relaciona dificuldades de aprendizagem em Matemática com o uso de estratégias de contagem elementares, o que poderia ocasionar uma sobrecarga na memória de trabalho, ocasionando maiores dificuldades.

O autor afirma, ainda, que as dificul-

dades relacionadas com o cálculo podem ser processuais e de recuperação de dados da memória. Sendo assim, os alunos com dificuldades apresentariam procedimentos aritméticos (estratégias de resolução de operações) evolutivamente imaturos e uma alta frequência de erros processuais de cálculo. Além disso, teriam dificuldades na representação e recuperação de dados aritméticos da memória de longo prazo semântica. Orrantía (2006) argumenta que os mecanismos que podem contribuir com os déficits processuais e de recuperação de dados podem ser diferentes. As estratégias menos maduras e os erros processuais se relacionam com o desenvolvimento do conhecimento conceitual da contagem. Já as dificuldades em recuperação de dados relacionam-se com a perda da informação da memória de trabalho, juntamente com a velocidade lenta na execução de estratégias de contagem e com a alta frequência de erros de cálculo, de tal forma que, com uma velocidade de contagem lenta, há maior possibilidade de se perder a informação na memória de trabalho, o que implica não desenvolver representações na memória. Os erros de cálculo que levam a associações incorretas na memória também podem conduzir a erros.

A multiplicação aparece em terceiro lugar dentre as operações mais difíceis para os alunos. Observa-se que 36,8% dos erros foram devidos à não memorização da tabuada, e cometidos, em sua grande maioria, no cálculo $20 (823 \times 96)$, que envolve as tabuadas do 6, do 8 e do 9. O não domínio do algoritmo também aparece como uma das categorias mais significativas. Em alguns desses erros evidencia-se a não compreensão do processo de cálculo; em outra, a não automatização do processo, verificada por erros de esquecimento de algumas etapas do algoritmo. Também é possível observar que o não domínio de processos próprios a outras operações, tais como adição, também

contribui para esses erros. É o caso do esquecimento do “vai um”, tanto na soma quanto na multiplicação, responsável por 15,7% dos erros. O algoritmo da multiplicação por dois algarismos no multiplicador envolve, além da tabuada, o domínio de vários procedimentos, dentre eles o da reserva e o da adição. A coordenação de todos esses elementos seria facilitada pela memorização e automatização do uso da tabuada. Agranionih & Dorneles (2004) registram que atividades como decorar a tabuada, memorizar fórmulas ou automatizar mecanismos de cálculos, são processos necessários e importantes para a aprendizagem da Matemática. Contudo, não devem ser utilizados como um fim em si mesmo, mas com vistas à memorização e/ou automatização de estratégias e processos úteis na resolução de problemas, desde que realizados em conexão com os seus significados e situações em que vão ser empregados. Desse modo, constituem-se em ferramentas importantes ao pensamento matemático em muitas situações.

Batista (1995), em um estudo com alunos de 2ª a 4ª série do ensino fundamental, encontrou dados semelhantes aos desta pesquisa. Analisando-se o desempenho em operações aritméticas, observou-se um total de erros por série bastante alto, considerando-se as expectativas de desempenho previstas nas propostas curriculares. Verificou que os erros se centraram em operações mais complexas, como soma com “vai um”, subtração com “empréstimo” e multiplicação e divisão por números com dois algarismos. Concluiu que o problema não se encontra na compreensão da operação em si, mas na realização do cálculo em situações mais complexas. Outra constatação da autora é que boa parte dos erros foram ocasionados pela falta de compreensão do valor posicional dos algarismos, no sistema de numeração decimal. Segundo ela, a solução dessas questões “[...] envolve o aprimoramento do planejamento pedagógico

e a preparação dos professores, de forma a utilizar estratégias que favoreçam a compreensão do valor posicional e o sentido das operações aritméticas, e não apenas o ensino de algoritmos padronizados, úteis em fases mais avançadas do processo.” (p. 72).

Um aspecto a ser considerado em nosso estudo diz respeito ao fato de que os alunos participantes não tinham diagnóstico de déficit cognitivo e, portanto, supõe-se que teriam condições para aprender. No resultado geral do TDE, 41% dos alunos participantes obtiveram desempenho inferior; 38%, desempenho médio; e 21%, desempenho superior. Verifica-se, dessa forma, que a maioria dos participantes (59%) obteve desempenho médio e superior no teste. Essa classificação indica que tais alunos apresentam desempenho esperado para a série no TDE, denotando que, possivelmente, têm as capacidades fundamentais para a Aritmética da 5ª série. Isso remete ao pensamento sobre a amplitude e complexidade dos fatores envolvidos nas dificuldades de aprendizagem, que não dizem respeito somente a fatores intrínsecos ao aluno, mas que se referem à própria natureza dos conceitos matemáticos, à forma de ensiná-los ou às condições do aluno para aprender.

5 Considerações finais

A partir dos resultados da pesquisa, observa-se que grande parte dos erros apresentados pelos alunos pode ser atribuída à não compreensão do algoritmo ou a dificuldades atencionais e/ou de memorização. Os algoritmos tradicionais da divisão e subtração, nos quais os alunos apresentaram mais dificuldades, envolvem sobremaneira a memória de trabalho, uma vez que muitas informações e processos têm que ser considerados ao mesmo tempo. Por exemplo, o algoritmo da divisão, que envolve o domínio da multiplicação, da tabuada e da subtração.

Já os cálculos com empréstimo na subtração envolvem as trocas e destrocas próprias dos agrupamentos de base 10 do sistema decimal de numeração. É possível que os alunos não apresentassem dificuldades no cálculo das quatro operações, se utilizassem algoritmos alternativos de cálculo, como sugerem autores como Kamii (1996).

Quando a operação é muito difícil, ou a possibilidade de fracasso é muito grande, pode ocorrer desistência, fato que é comumente observado nas escolas, reforçando a ideia de incapacidade para a Matemática. Essa pode ser uma das explicações para o fato de alunos que não possuem déficits cognitivos, nem diagnóstico estabelecido de transtorno de aprendizagem, apresentarem, na 5ª série, dificuldades esperadas para alunos de anos iniciais, no âmbito das quatro operações básicas.

Outra questão a considerar é que a compreensão dos algoritmos tradicionais das quatro operações exige o domínio das propriedades do sistema de numeração decimal, compreensão considerada tardia pela literatura (KAMII, 1996). Infere-se, portanto, que muitos erros cometidos pelos alunos podem ser devidos ao descompasso entre o tempo em que esses algoritmos são ensinados na escola e o tempo próprio de cada criança para a compreensão dos mesmos.

Em muitos erros, foi possível perceber que mesmo alunos com dificuldades buscam caminhos alternativos para a resolução dos cálculos quando se deparam com algum obstáculo no processo de resolução. Diante da dificuldade, ou da falta de recursos, criam soluções próprias, mesmo quando não correspondem aos procedimentos ou respostas esperados. Em geral, as avaliações tradicionalmente realizadas na escola, que valorizam mais o número de acertos e erros, não consideram os procedimentos realizados pelos alunos. Se assim o fizessem, certamente evidenciaríamos o desenvolvimento do seu ra-

ciocínio, o que possibilitaria uma avaliação mais consistente e subsídios para trabalhar com as dificuldades encontradas.

Os erros e dificuldades que se evidenciaram nessa pesquisa levam a pensar na importância do desenvolvimento de estratégias que favoreçam a superação dos mesmos, uma vez que o domínio e aplicação de alguns concei-

tos são fundamentais para que o aluno possa prosseguir na aquisição dos conhecimentos matemáticos. Espera-se que as informações, obtidas por meio desse trabalho, possam provocar reflexões acerca das dificuldades encontradas no ensino-aprendizagem da Matemática, bem como constituir alternativas pedagógicas preventivas.

AUTORES

Fernanda Zatti – Psicóloga e pós-graduanda em Psicologia Organizacional e do Trabalho ,pela URI - Campus de Erechim. Atua como Psicóloga no IFRS – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - Campus de Erechim. E-mail: fernandazt@yahoo.com.br

Neila Tonin Agranionih – Doutora em Educação (UFRGS). Professora da Universidade Federal do Paraná. E-mail: nagranionih@ufpr.br

Jacqueline Raquel Bianchi Enricone – Psicóloga. Mestre em Educação (UFRGS), professora da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões - Campus de Erechim. E-mail: jenricone@uri.com.br

REFERÊNCIAS

AGRANIONI, N. T.; DORNELES, B. V. Memorização, Memória e Aprendizagem Matemática. **Revista Perspectiva**, Erechim, v. 28, n.103, p. 59-72, set. 2004.

BATISTA, C. G. Fracasso Escolar: Análise de Erros em Operações Matemáticas. **Zetetiké**, v. 3, n. 4, p. 61-72, nov. 1995.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

FONSECA, V. **Introdução às dificuldades de aprendizagem**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

GÓMEZ–GRANELL, C. A aquisição da linguagem matemática: símbolos e significados. In: TEBEROSKI, A.; TOLCHINSKY, L. (ORGS). **Além da alfabetização**. A aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Atica, 1996.

KAMII, C. **Aritmética**: novas perspectivas: implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1996.

ORRANTÍA, J. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. **Psicopedagogía**, v. 23, n. 71, p. 158-180, 2006.

PAROLIN, I. C. H.; SALVADOR. L. H. S. “Odeio matemática” - Um olhar psicopedagógico para o ensino da matemática e suas articulações sociais. **Revista Psicopedagogia**, v. 19, n. 59, p.31-42, 2002.

RIVIÈRE, A. (1995). Problemas e Dificuldades na Aprendizagem da Matemática: uma Perspectiva Cognitiva. In: COLL, C.; PALACIOS, J.; MARCHESI, E. A. (Orgs.), **Desenvolvimento psicológico e educação: necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995, v. 3.

STEIN, L.M. **TDE** - Teste de Desempenho Escolar. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

TEIXEIRA, L. R. M. Dificuldades e erros na Aprendizagem da Matemática. In: VII EPEM ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, São Paulo. **Anais**. Disponível em: <http://http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr14-Leny.doc>. Acesso em: 25 jul. 2008.