

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**SIMULAÇÃO DE FLUXOS BIDIMENSIONAIS,  
LAMINARES E INCOMPRESSÍVEIS ENTRE  
SUPERFÍCIES MÓVEIS**

por

**Clémerson Alberi Pedroso**

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

**Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli**  
Orientador

Porto Alegre, janeiro de 2001.

51 : 532  
C626s

Pedroso, Clémerson Alberi

Simulação de fluxos bidimensionais, laminares e incompressíveis entre superfícies móveis. -- Porto Alegre : UFRGS, 2001.

xiv, 96 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, 2001. Bortoli, Álvaro Luiz de, orient.

Inclui bibliografia.

I. Matemática Aplicada : Mecânica dos Fluidos. 2. Análise Numérica. I. Bortoli, Álvaro Luiz de, orient. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada. III. Título

(Catalogação na fonte: João Leonel dos Santos Schardong, CRB10 - 1223)

Assuntos/cabeçalhos para classificação:

1. Matemática Aplicada : Mecânica dos Fluidos - CDU 51 : 532
2. Análise Numérica - CDU 519.6

Cabeçalhos para indexação (palavras-chave):

1. Método de Runge-Kutta : Integração Temporal : Relaxações Sucessivas
2. Método de Diferenças Finitas
3. Equação de Navier-Stokes
4. Equação de Maxwell
5. Equação de Poisson
6. Equação da Energia
7. Fluxos Bidimensionais
8. Fluxos Laminares
9. Fluxos Incompressíveis
10. Escoamento de Couette
11. Fluidos Newtonianos
12. Fluidos Não-Newtonianos

## RESUMO

Neste trabalho apresenta-se a simulação de fluxos bidimensionais, laminares e incompressíveis entre cilindros rotatórios e placas paralelas (escoamento de Couette), de fluidos Newtonianos e não-Newtonianos, podendo envolver trocas de calor.

Determina-se a distribuição de temperatura, velocidade e pressão resolvendo, pelo método de diferenças finitas, baseado no processo de integração temporal de Runge-Kutta e Relaxações Sucessivas, as equações governantes de escoamentos. O sistema de equações considerado envolve as de Navier-Stokes, Maxwell, Poisson e energia, adimensionalizadas, permitindo versatilidade na obtenção e comparação entre os resultados.

Usa-se o sistema de coordenadas generalizadas por este possibilitar o emprego de domínios quaisquer. Os resultados obtidos, a baixo custo, utilizando uma estação de trabalho Silicon Graphics Origin200 (LICC) e o supercomputador CRAY T94 (CESUP/RS), com base num algoritmo computacional eficiente (dinâmico) desenvolvido na linguagem FORTRAN 90, são visualizados graficamente pelos aplicativos Visual3.1 e Graf2d através de linhas de corrente, isotermas e perfis variados, aproximando-se adequadamente dos resultados analíticos, numéricos e experimentais existentes na literatura.

## ABSTRACT

This work presents the numerical simulation of two dimensional incompressible laminar flows between rotating cylinders and parallel plates (Couette flow) for Newtonian and non-Newtonian fluids, with energy dissipation in the form of heat.

Temperature, velocity and pressure distributions are determined numerically, by the finite differences explicit Runge-Kutta multistage scheme and Successive Relaxation. The system of equations involves the Navier-Stokes, Maxwell model, Poisson and an energy equation, in adimensional form, allowing versatility in order to obtain and compare the results.

The boundary fitted coordinates system is employed, because fluids through general forms can be analysed. Obtained results, at low costs, used the Silicon Graphics Origin200 and CRAY T94 (CESUP-UFRGS), based on an efficient algorithm written in FORTRAN 90, and they are displayed through streamlines, isotherms and other perfis, and showed to compare well with analytical, numerical or experimental data found in the literature.

## SUMÁRIO

RESUMO.....	i
ABSTRACT.....	ii
LISTA DE FIGURAS.....	vi
LISTA DE TABELAS.....	ix
LISTA DE SÍMBOLOS.....	x
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. MODELOS MATEMÁTICOS.....	9
2.1 Introdução.....	9
2.2 Conjunto de Equações.....	9
2.2.1 Equação da Continuidade.....	10
2.2.2 Equação da Quantidade de Movimento.....	11
2.2.3 Equação da Pressão.....	13
2.2.4 Equação da Temperatura.....	14
2.3 Relações Constitutivas Complementres.....	17
2.3.1 Fluidos Newtonianos.....	18
2.3.2 Comportamento de Fluidos não-Newtoninos.....	19
2.3.3 Modelos Mecânicos.....	20
2.3.4 Modelo de Maxwell.....	21
2.3.5 Relaxação para um Fluido de Maxwell.....	23
2.3.6 Variações do Modelo de Maxwell.....	24
2.4 Transferência de Calor por Convecção.....	26
2.4.1 Notações.....	26
2.4.2 Aproximação de Boussinesq.....	27

2.5 Análise Dimensional.....	31
2.5.1 Natureza da Análise Dimensional.....	31
2.5.2 Alguns Parâmetros Adimensionais.....	32
2.5.3 Forma Adimensional das Equações Governantes.....	35
3. PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO.....	38
3.1 Método de Diferenças Finitas.....	38
3.1.1 Notações.....	38
3.1.2 Aproximação das Derivadas.....	39
3.2 Malha Computacional e Coordenadas Generalizadas.....	41
3.2.1 Malha Computacional.....	42
3.2.2 Coordenadas Generalizadas.....	44
3.3 Métodos de Solução.....	47
3.3.1 Método das Relaxações Sucessivas.....	48
3.3.2 Método de Runge-Kutta.....	48
3.3.3 Critério de Convergência.....	49
3.3.4 Estabilidade.....	50
3.3.5 Algoritmo Computacional.....	53
4. RESULTADOS.....	56
4.1 Placas Paralelas.....	57
4.2 Cilindros.....	63
4.2.1 Fluxos Newtonianos.....	64
4.2.2 Fluxos não-Newtonianos.....	71
5. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS.....	78
5.1 Conclusões.....	78
5.2 Perspectivas.....	80
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	81
APÊNDICE A.....	86
A.1 Cálculo das Métricas $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ .....	86
A.2 Cálculo das Métricas $\xi_{xx}, \xi_{yy}, \eta_{xx}, \eta_{yy}$ .....	88

APÊNDICE B.....	91
B.1 Adimensionalização da Equação da Conservação da Massa.....	91
B.2 Adimensionalização da Equação da $CQM_x$ .....	91
B.3 Adimensionalização da Equação da $CQM_yB$ .....	93
B.4 Adimensionalização da Equação da Pressão.....	94
B.5 Adimensionalização da Equação da Temperatura.....	94
B.6 Adimensionalização das Equações Constitutivas Complementares de UCM.....	96

## LISTA DE FIGURAS

Fig. 1.1	Relação tensão-deformação para fluidos Newtonianos e não-Newtonianos.....	3
Fig. 1.2	Representação da deformação de fluidos viscosos.....	5
Fig. 2.1	Conservação da massa num elemento infinitesimal bidimensional.....	10
Fig. 2.2	Forças associadas a um elemento infinitesimal de fluido que agem na direção x, devido à (a) pressão e à (b) tensão.....	11
Fig. 2.3	Primeira Lei da Termodinâmica aplicada a um elemento infinitesimal bidimensional: (a) tensão, (b) pressão e (c) fluxo de calor.....	15
Fig. 2.4	Relação tensão-deformação segundo a Lei de Newton para a viscosidade.....	18
Fig. 2.5	Comportamento de fluidos.....	19
Fig. 2.6	Modelos mecânicos do comportamento ideal reológico (a) elemento Hookeano, (b) elemento Newtoniano.....	21
Fig. 2.7	Modelo de Maxwell.....	22
Fig. 2.8	Fluxo devido à flutuação ao longo duma parede aquecida e distribuição de pressão num reservatório de fluido parado.....	29
Fig. 2.9	Efeitos do número de Prandtl na difusão térmica e viscosa [WIN91].....	33
Fig. 3.1	Ilustração do arranjo espaços e tempo.....	39
Fig. 3.2	Ilustração do plano físico para cilindros rotatórios.....	42
Fig. 3.3	Ilustração do plano físico para placas paralelas.....	42
Fig. 3.4	Malhas computacionais para (a) cilindros rotatórios e (b) planos paralelos.....	43
Fig. 3.5	Arranjo co-localizado.....	43
Fig. 3.6	Áreas nos planos (a) físico e (b) transformado.....	44
Fig. 3.7	Esquema do algoritmo desenvolvido.....	54

Fig. 4.1	Esquema do plano físico para o escoamento entre placas paralelas.....	57
Fig. 4.2	Malha computacional para placas paralelas (a) visão global e (b) ampliação da região da saída.....	59
Fig. 4.3	Comparação do perfil de velocidade da solução analítica de Schlichting e o escoamento de Couette (placas paralelas) com $P=0,8$ .....	59
Fig. 4.4	Escoamento de Couette entre placas paralelas segundo um gradiente de pressão adimensional.....	60
Fig. 4.5	Soluções para o escoamento de Couette (placas paralelas) com variação do gradiente adimensional de pressão: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.....	60
Fig. 4.6	Distribuição de temperatura no escoamento de Couette para várias relações de $Pr Ec$ conforme Schlichting [SCH68].....	62
Fig. 4.7	Distribuição de temperatura no escoamento de Couette (placas paralelas) obtida para vários produtos $Pr Ec$ .....	62
Fig. 4.8	Comparação da solução numérica e analítica conforme Schlichting [SCH68], para o escoamento de Couette com $Pr Ec=8$ .....	63
Fig. 4.9	Representação de cilindros concêntricos de comprimento axial tendendo ao infinito ( $g \rightarrow \infty$ ).....	64
Fig. 4.10	Plano físico para o escoamento entre cilindros rotatórios.....	64
Fig. 4.11	Malha computacional sem refinamento entre cilindros rotatórios concêntricos.....	65
Fig. 4.12	Malha computacional entre os cilindros com refinamento em regiões específicas.....	66
Fig. 4.13	Comparação da distribuição de temperatura entre cilindros rotatórios concêntricos com os dados experimentais obtidos por Taylor [TAY35] conforme Hawarth.....	66
Fig. 4.14	Comparação das isotérmias: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98]; $Re=0$ , $Ra=10^5$ .....	67
Fig. 4.15	Comparação das linhas de corrente: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98]; $Re=0$ , $Ra=10^5$ .....	67
Fig. 4.16	Comparação das isotérmias: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98]; $Re=0$ , $Ra=10^5$ .....	68
Fig. 4.17	Comparação das linhas de corrente: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98]; $Re=0$ , $Ra=10^5$ .....	68

Fig. 4.18	Comparação das isotermas: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98]; $Re = 378$ , $Ra = 10^5$ .....	69
Fig. 4.19	Comparação das linhas de corrente: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98]; $Re = 378$ , $Ra = 10^5$ .....	69
Fig. 4.20	Comparação das linhas de corrente: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I, et al. [MIN98]; $Re = 1195$ , $Ra = 10^5$ .....	70
Fig. 4.21	Comparação das linhas de corrente: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I, et al. [MIN98]; $Re = 1195$ , $Ra = 10^5$ .....	70
Fig. 4.22	Solução numérica dum fluxo Newtoniano com $Pr = 5,625$ e $Re = 10$ : (a) isotermas e (b) linhas de corrente.....	71
Fig. 4.23	Malha computacional de $21 \times 41$ pontos com refinamento próximo às paredes dos cilindros.....	72
Fig. 4.24	Comparação das isotermas: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Li e Davies [LI94], $Re = 10$ , $De = 4,2 \times 10^{-3}$ , $Ec = 0,002$ com condição de contorno DI-DO, $T_1 = T_0 = 1,367$ , $\varepsilon = 0,64$ .....	74
Fig. 4.25	Linhas de corrente para $Re = 10$ , $De = 4,2 \times 10^{-3}$ , $Ec = 0,002$ com condição de contorno DI-DO, $T_1 = T_0 = 1,367$ , $\varepsilon = 0,64$ .....	74
Fig. 4.26	Comparação das isotermas: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Li e Davies [LI94], $Re = 10$ , $De = 4,2 \times 10^{-3}$ , $Ec = 0,002$ , condição de contorno RI-DO, $T_{r1} = 1,349$ , $T_0 = T_1 = 1,367$ , $\varepsilon = 0,64$ e com $Bi = 0,001$ .....	75
Fig. 4.27	Comparação das isotermas: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Li e Davies [LI94], $Re = 10$ , $De = 4,2 \times 10^{-3}$ , $Ec = 0,002$ , condição de contorno DI-RO, $T_{r0} = 1,349$ , $T_0 = T_1 = 1,367$ , $\varepsilon = 0,64$ e com $Bi = 0,001$ .....	75
Fig. 4.28	Efeito do aumento da excentricidade no perfil de temperatura através da pequena fenda entre o cilindro interno e externo, $\varepsilon = 0,1, 0,5, 0,8$ e $0,95$ , com condição de contorno DI-DO, $T_1 = T_0 = 1,367$ .....	76
Fig. 4.29	Isotermas: $\varepsilon = 0,1$ , $Re = 10$ , $De = 4,2 \times 10^{-3}$ , $Ec = 0,002$ , com condição de contorno DI-DO, $T_1 = T_0 = 1,367$ .....	77
Fig. 4.30	Isotermas: $\varepsilon = 0,5$ , $Re = 10$ , $De = 4,2 \times 10^{-3}$ , $Ec = 0,002$ , com condição de contorno DI-DO, $T_1 = T_0 = 1,367$ .....	77
Fig. 4.31	Isotermas: $\varepsilon = 0,95$ , $Re = 10$ , $De = 4,2 \times 10^{-3}$ , $Ec = 0,002$ , com condição de contorno DI-DO, $T_1 = T_0 = 1,367$ .....	77

## LISTA DE TABELAS

Tab. 2.1	Caracterização das diferenças entre as convecções forçada e natural..	27
Tab. 4.1	Resumo (síntese) das comparações entre os resultados.....	56

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Parâmetro ponderativo do modelo correlacional ( <i>corotational model</i> )
$\bar{a}$	Vetor aceleração
$B$	Matriz $[b_{ij}]_{m \times n}$
$Bi$	Número de Biot
$c$	Número de Courant
$C_p$	Coefficiente de pressão ou calor específico à pressão constante
$\bar{D}$	Tensor D (deformação)
$d$	Diâmetro dum tubo
$De$	Número de Deborah
$dh$	Varição da entalpia
$dS$	Área no plano físico
$D_{ij}$	Componente do tensor $\bar{D}$
$\frac{D}{Dt}$	Derivada material $\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$
$e$	Energia específica
$e$	Distância entre os centros dos cilindros
$Ec$	Número de Eckert
$\bar{F}$	Vetor força
$f_x, f_y$	Componentes da força de corpo nas direções x e y, respectivamente
$\bar{g}$	Vetor força gravitacional
$H$	Espessura característica
$Gr$	Número de Grashof
$G_s$	Módulo de elasticidade
$h$	Entalpia

$h$	altura
$I_2$	Segunda constante da taxa de cisalhamento do tensor $\overline{\overline{D}}$
$J$	Jacobiano da transformação de coordenadas
$K$	Parâmetro reológico
$L$	Comprimento
$m$	Massa
$n$	Parâmetro reológico (sobrescrito)
$p$	Pressão
$P$	Gradiente de pressão adimensional
$p_\infty$	Pressão da corrente livre
$Pe$	Número de Péclet
$Pr$	Número de Prandtl
$\dot{q}$	Fluxo de calor através duma superfície
$Q$	Condução de calor através da superfície
$\bar{Q}_{ij}$	Vetor dos fluxos convectivos
$\bar{r}$	Varição média do raio
$\bar{R}_{ij}$	Diferença $\bar{Q}_{ij} - \bar{D}_{ij}$
$Ra$	Número de Rayleigh
$Re$	Número de Reynolds
$R$	Raio
$R_i$	Raio do cilindro interno
$R_o$	Raio do cilindro externo
$S(B)$	Raio espectral da matriz $B$
$t$	Tempo
$T$	Temperatura
$T_r$	Temperatura de referência
$T_1$	Temperatura da placa inferior do escoamento de Couette
$T_2$	Temperatura da placa superior do escoamento de Couette
$T_\infty$	Temperatura absoluta ou da corrente livre
$\text{tr}(\tau)$	Traço do tensor tensão $\tau$
$T_w$	Temperatura da superfície

$\bar{U}$	Velocidade média
$u, v$	Componentes da velocidade local nas direções $x$ e $y$ , respectivamente
$\bar{v}$	Vetor velocidade $\bar{v} = u\bar{i} + v\bar{j}$
$W$	Trabalho
$\bar{W}_{ij}$	Vetor dos fluxos convectivos

### Símbolos Especiais

$\alpha$	Difusibilidade térmica
$\beta$	Coefficiente de expansão térmica
$\gamma$	Tensão de cisalhamento
$\dot{\gamma}$	Taxa de cisalhamento
$\gamma_s$	Tensor de cisalhamento dum elemento Newtoniano (sobrescrito $s = spring$ )
$\gamma_d$	Tensor de cisalhamento dum elemento Hookeano (sobrescrito $d = dashpot$ )
$\delta$	Tolerância para convergência dum processo iterativo
$\varepsilon$	Excentricidade entre cilindros
$\zeta$	Comprimento axial do cilindro
$\varsigma$	Constante reológica
$\kappa$	Condutividade térmica
$\eta$	Viscosidade
$\eta_d$	Viscosidade do elemento Newtoniano
$\eta_p$	Viscosidade plástica
$\theta$	Varição angular
$\lambda$	Tempo de relaxação
$\mu$	Viscosidade dinâmica
$\nu$	Viscosidade cinemática
$\xi_{ij}, \eta_{ij}$	Componentes das métricas
$\rho$	Massa específica

$\rho_{\infty}$	Massa específica da corrente livre
$\tau$	Tensor tensão
$\dot{\tau}$	Tensor tensão extra
$\tau_d$	Tensor tensão do elemento Newtoniano
$\tau_{xx}, \tau_{yy}$	Componente da tensão normal nas direções x e y, respectivamente
$\tau_{xy}$	Componente da tensão de cisalhamento na direção x normal à superfície y
$\tau_y$	Tensão na direção y
$\tau_{yx}$	Componentes da tensão de cisalhamento na direção y normal à superfície x
$\tau_0$	Tensão num dado instante
$\tau_s$	Tensor tensão dum elemento Hookeano (subscrito s = <i>spring</i> - mola)
$\tau_d$	Tensor tensão dum elemento Newtoniano (subscrito d = <i>dashpot</i> – amortecedor)
$\bar{\tau}_{ij}$	Tensão extra para o modelo “ <i>Upper Convected Maxwell</i> ”
$\tilde{\tau}_{ij}$	Tensão extra para o modelo “ <i>Lower Convected Maxwell</i> ”
$\hat{\tau}_{ij}$	Tensão extra para o modelo correlacional ( <i>corotational model</i> )
$Y(\tau)$	Função do tensor tensão $\tau$
$\omega$	Parâmetro do método de Relaxação Sucessivas
$\chi$	Tempo
$\psi$	Função qualquer
$\Omega$	Rotação
$\phi$	Função dissipação viscosa
$\bar{\nabla}$	Operador gradiente
$\nabla^2$	Laplaciano
$\Delta E$	Variação da energia
$\Delta t$	Passo de tempo
$\Delta T$	Diferença de temperatura
$\sum F_x, \sum F_y$	Somatório das forças que agem nas direções x e y num elemento infinitesimal de volume, respectivamente
$\Delta x, \Delta y$	Espaçamentos na direções x e y, repectivamente
$\Delta \xi, \Delta \eta$	Elementos de comprimento no plano transformado

## Sobrescritos

$n$	Indica iteração
$n+1$	Indica iteração posterior (seguinte)
$*$	Refere-se à variável adimensional
$k$	Indicador de iteração temporal

## Subscritos

$\infty$	Valores da corrente livre
$w$	Indica condição de parede
$i, j$	Indicador de referência dum ponto na malha
$x, y$	Direção horizontal e vertical, respectivamente, do plano cartesiano
$o, i$	Indicador de referência de cilindro externo e interno, respectivamente

# 1. INTRODUÇÃO

A matemática no decorrer da história do homem tem sido desafiada a criar modelos baseados em expressões matemáticas, que representem e que contribuam para o entendimento de situações reais, ligadas a fenômenos da natureza ou artificiais. Entretanto, pode-se dizer que a complexidade para resolução desses modelos matemáticos é diretamente proporcional à complexidade do fenômeno modelado.

As equações diferenciais parciais de Navier-Stokes são usadas para o estudo de escoamentos complexos de fluidos, mas não apresentam uma solução analítica completa até o presente momento. Mas, assim como as demais ciências de áreas exatas, humanas e naturais do conhecimento humano, a matemática tem auxiliado o desenvolvimento de sub-áreas, entre elas a dos métodos numéricos.

A formulação matemática de conservação para processos naturais e para a maioria dos processos industriais, envolvendo fenômenos ligados ao escoamento de fluidos com transferência de calor e massa, ou até mesmo reações químicas, consiste de equações diferenciais parciais de alta ordem, não-lineares e não-homogêneas, geralmente para domínios também complexos, sujeitos a condições iniciais e de contorno variadas, que traduzem uma situação mais realística.

A validação da solução dum fenômeno, obtida por métodos numéricos, compreende uma bateria de testes envolvendo comparações com soluções analíticas de problemas mais simples e consagrados pela comunidade científica, e de dados experimentais, estes últimos limitados pelo volume de recursos envolvidos na resolução espacial do problema [RIZ98]. Logo, a experimentação e as soluções analíticas devem ser encaradas como ferramentas auxiliares indispensáveis numa validação consistente de problemas resolvidos numericamente.

Vale salientar que, do ponto de vista prático, os modelos matemáticos resolvidos numericamente tornam-se versáteis podendo ser analisados exaustivamente e rapidamente perante várias simulações computacionais e a baixo custo. Claro, isso graças ao

desenvolvimento de computadores com alta velocidade de processamento e grande capacidade de armazenamento de dados.

Contudo, a escolha adequada das equações que regem determinados fenômenos é primordial, pois de nada adianta utilizar um bom método numérico se as equações do modelo matemático não representam com fidelidade o fenômeno físico ou físico-químico [MAL95] em questão.

Em se tratando de processos naturais e industriais, a necessidade de fluidos viscosos é evidente em sistemas hidráulicos de máquinas agrícolas, motores de automóveis, turbinas de aviões, lentes de contato, articulações de membros humanos, entre outros, compreendendo várias ciências de forma multidisciplinar entre a matemática, a engenharia, a reologia e áreas afins.

Aqui, a simulação da iteração fluxo e superfícies móveis restringe-se ao estudo das variáveis velocidade, pressão, temperatura e tensão de cisalhamento de casos específicos de fluidos viscosos; não se objetiva analisar possíveis problemas relacionados ao campo da tribologia, como atrito, desgaste e/ou devido a possíveis instabilidades do sistema [YAM90, ROB91, MIY93]. Os fluidos viscosos considerados, quanto à relação tensão-deformação, obedecem a leis constitutivas conhecidas para fluidos na maioria Newtonianos e não-Newtonianos, tais como, a lei da viscosidade de Newton e para fluidos de Maxwell, respectivamente.

Fluidos comuns como o ar e a água têm viscosidade ( $\mu$ ) aproximadamente constante. Tais fluidos que se comportam de acordo com a lei

$$\tau = 2\mu \frac{dU}{dy}$$

isto é, a tensão de cisalhamento ( $\tau$ ) é proporcional ao gradiente de velocidade ou à taxa de deformação por cisalhamento  $\left(\frac{dU}{dy}\right)$ , são conhecidos como fluidos Newtonianos. Muitos fluidos, entretanto, têm comportamento viscoso que depende diretamente da taxa em que eles são cisalhados. Tais materiais são conhecidos como fluidos não-Newtonianos (veja Fig. 1.1). Resumidamente pode-se dizer que a relação tensão-deformação não é linear nos fluidos não-Newtonianos. Exemplos são polímeros derretidos, creme dental, produtos farmacêuticos e alimentícios, entre outros.

O comportamento em escoamento de fluidos não-Newtonianos não pode ser descrito precisamente pelas equações de Navier-Stokes; há a necessidade de equações constitutivas complementares como por exemplo a equação de Maxwell para fluidos viscoelásticos.

$$\tau + \lambda \dot{\tau} = 2\mu \frac{dU}{dy}$$

onde  $\lambda$  representa a relaxação temporal e  $\dot{\tau}$  o tensor tensão extra (correção da tensão).

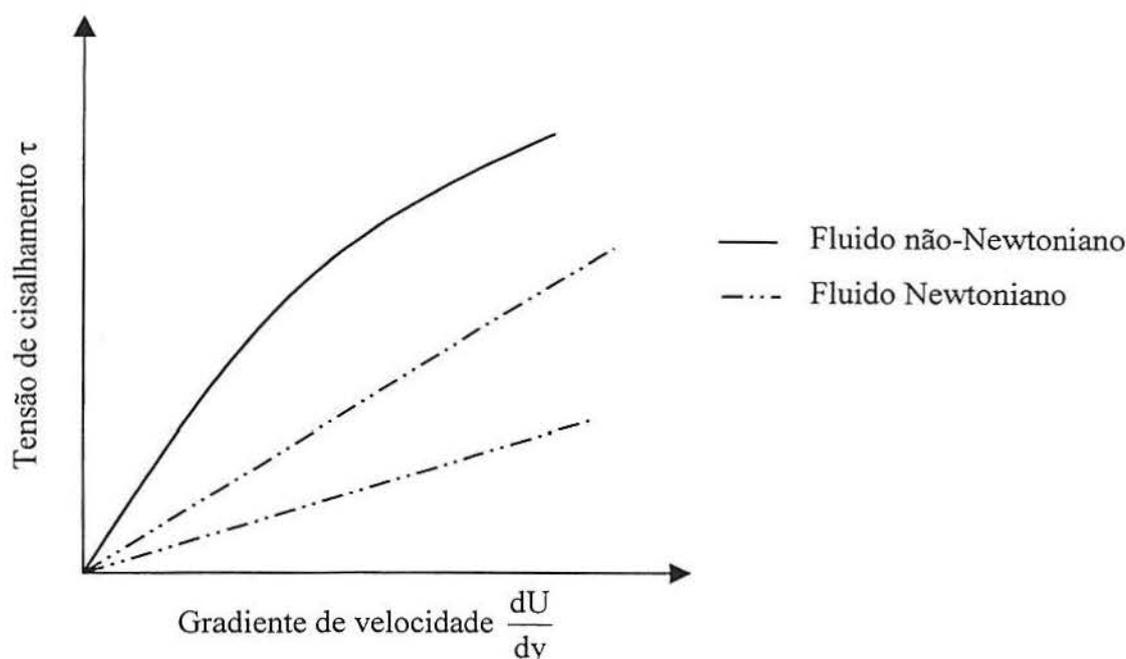


Fig. 1.1 – Relação tensão-deformação para fluidos Newtonianos e não-Newtonianos.

Assim, também invade-se a ciência chamada reologia, já citada, cujo termo inventado por Bingham significa o estudo da deformação e escoamento da matéria [BAR93]. Envolve ciências como matemática, física, engenharia e físico-química. Cita-se a reologia pois encontra-se menos conteúdos sobre fluidos não-Newtonianos na literatura de matemática aplicada ou mecânica dos fluidos. A definição de reologia, de forma abrangente, estuda o comportamento da matéria incluindo extremos clássicos, como elementos sólidos elásticos Hookeanos e líquidos viscosos Newtonianos [FER91].

A breve retrospectiva histórica descrita por Barnes [BAR93] apresenta algumas datas importantes nas quais foram estabelecidos conceitos utilizados neste trabalho, conforme segue:

**1678** – Robert Hooke (*True Theory of Elasticity*) afirmou: “se você duplicar as tensões você duplica as extensões”. Este é o princípio básico da teoria da elasticidade clássica (linear).

**1687** – Isaac Newton (*Principia*) postulou que “as resistências que surgem da dificuldade de deslizamento de líquidos são proporcionais à velocidade”. A dificuldade de deslizamento é o que chamamos de viscosidade. Isto é sinônimo de “fricção externa” e é uma “resistência ao escoamento”.

$$\tau = \mu \frac{U}{d}$$

onde a constante de proporcionalidade  $\mu$  é chamado coeficiente de viscosidade.

**1835** – Wilhelm Weber provou experimentalmente ao analisar linhas de seda que estas não eram perfeitamente elásticas. “Uma carga longitudinal”, ele escreve, “produz imediatamente uma extensão, que segue-se alongando com o tempo. Removendo a carga há imediatamente uma contração gradual, contraindo-se até o comprimento original”. Neste caso, no material basicamente sólido, o comportamento não pode ser descrito somente pela lei de Hooke. Há elementos que submetidos a um escoamento descrevem deformações padrões, estes estão claramente associadas a essa idéia. Mais tarde foi introduzido o termo “viscoelasticidade”.

**1867** – James Clerk Maxwell (*On the dynamical theory of gases – Encyclopedia Britannica*) propôs um modelo matemático (já citado), para fluidos que apresentam propriedade elástica.

Embora Newton tenha introduzido sua idéia em 1687, esta só foi consagrada no século XIX, quando Navier e Stokes, independentemente, desenvolveram uma teoria consistente, fundando então o que conhecemos por líquido viscoso Newtoniano. As equações governantes para tais fluidos são conhecidas como equações de Navier-Stokes [BAR93].

O estudo de fluidos não-Newtonianos, ou seja, o entendimento de propriedades reológicas de materiais tem contribuído para o desenvolvimento de materiais usados em lança-chamas, líquidos detergentes, óleos multi-estágios (pontos), adesivos autocolantes, produtos farmacêuticos, produtos alimentícios, pesquisas médicas (os últimos três exemplos pertencem ao ramo da bioreologia), fibras sintéticas e processamento de plásticos industriais.

A avaliação da deformação de fluidos não-Newtonianos está relacionada à tensão aplicada; essa deformação não linear é variável, depende das características moleculares do fluido e da influência de características físicas como velocidade, tensões (forças), pressão e

temperatura, que o fluido está submetido quando em escoamento. Considerando um elemento infinitesimal de fluido a uma velocidade sob a ação de forças que produzem tensão de cisalhamento, tem-se a deformação representada por  $D$ , e diz-se que o cisalhamento corresponde à forma como o paralelograma se deforma por uma força que produz tensão de cisalhamento [STR61, HUG79, VIL00].

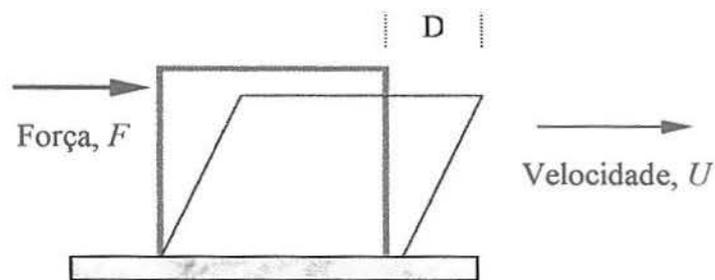


Fig. 1.2 – Representação para deformação de fluidos viscosos.

Fluidos com características sólidas que se deformam quando da aplicação duma força (tensão) externa e retornam ao seu estado original quando a tensão inicial é retirada são classificados como elásticos.

Se, após a retirada da tensão externa o fluido continua se deformando, não voltando ao seu estado inicial, este teve uma resposta viscosa à força externa aplicada. Isso ocorre devido à grande mobilidade das moléculas, mesmo para pequenas forças externas, causando um equilíbrio de estado em que a tensão externa resulta numa taxa de deformação constante.

Fluidos que apresentam propriedades viscosas e elásticas simultaneamente são chamados de substâncias viscoelásticas; retornam parcialmente à sua forma original quando a tensão aplicada é retirada.

Um mesmo material em momentos diferentes (tempos diferentes) pode apresentar uma resposta ora elástica e/ou ora viscosa. Tal comportamento é resultado da estrutura molecular do material. A resposta rápida ou lenta é medida pelo “tempo natural” do material, pela difusão espontânea molecular e constituição atômica do mesmo [TAN92, BAR93].

Materiais que apresentam um decréscimo da viscosidade  $\eta$  com o tempo sob uma tensão constante, como por exemplo a maioria das tintas, são chamados de tixotrópicos, aqueles que apresentam um aumento de viscosidade com o tempo sob tensão constante são chamados de reopéticos [FOX98]. Mas tais características não serão abordadas aqui.

O comportamento de fluidos viscoelásticos pode variar perante condições de escoamento e de uma estrutura molecular; portanto, não existe uma única relação constitutiva capaz de prever todos os comportamentos observados em fluidos viscoelásticos [RED94]. Entre os vários modelos que descrevem comportamentos viscoelásticos, disponíveis na literatura, cita-se:

- O modelo de Giesekus apresentado por Beris [BER84, BER86], o qual simula computacionalmente o fluxo pelo método de elementos finitos em mancais (*journal bearing*) para excentricidades pequenas e moderadas.
- O modelo de Herschel-Bulkey para duas dimensões/axisimétrico, dum fluxo incompressível, laminar e desenvolvido, com viscosidade efetiva para dutos com expansão e contração, descrito por Vradis e Hammad [VRA98], os quais analisam o método de aproximação por diferenças finitas.
- Fluidos modelados por Power-Law sobre uma placa plana com injeção/sucção, em que as equações diferenciais parciais (EDP's) são decompostas numa seqüência de equações diferenciais ordinárias (EDO's) usando séries de Mark-Chao, segundo Rao [RAO99].
- Pontrelli [PON95] resolve numericamente usando o método da colocação, com funções de aproximação *spline*, o modelo de fluidos de Oldroyd-B (modelo que considera a elasticidade e a memória do fluido, exibido pela maioria dos polímeros e tintas) entre dois cilindros concêntricos circulares.
- Novamente o modelo de Herschel-Bulkey agora para cilindros concêntricos rotatórios de comprimento infinito, resolvido numericamente usando diferenças finitas, também por Hammad e Vradis [HAM95].
- Modelo de White-Metzner para escoamentos bidimensionais, não isotérmicos, entre cilindros rotatórios com excentricidade para diferentes condições de contorno, resolvido por Li e Davies [LI94] pelo método pseudo-espectral com transformação bipolar para discretização espacial das equações governantes.
- Uso da derivação contravariante convectiva aplicado a um escoamento lubrificante de fluido viscoelástico de segunda ordem com dependência temporal, para duas geometrias bidimensionais: *journal bearing* (mancal) e placa *slinder* inclinada (movimento lateral de uma das duas superfícies não paralelas) apresentado por Sawyer e Tichy [SAW98].

- O modelo de *Upper-Convected Maxwell* com a presença do adimensional Deborah usado para simular o fluxo entre cilindros concêntricos, com um dos cilindros em movimento rotatório pelo método espectral/elementos finitos apresentado por Beris [BER87].
- O modelo de White-Metzner com a presença de uma segunda constante da taxa de cisalhamento  $I_2 = 1/2(D_{ij}D_{ij})$ , conforme equação abaixo, descrito por Reddy e Gartling [RED94], Crochet [CRO84] e Barnes [BAR93].

$$\tau_{ij} + \lambda(I_2)\dot{\tau}_{ij} = 2\eta(I_2)D_{ij}$$

onde  $\eta$  representa a viscosidade.

A formulação matemática adotada no presente trabalho para fluidos viscosos, resolvida numericamente, será na forma adimensional com parâmetros tais como Reynolds, Prandtl, Deborah entre outros, por permitir generalidade de comparação entre escoamentos desde que a condição de similaridade seja satisfeita. Entende-se por similaridade quando os parâmetros adimensionais e as variáveis são todas iguais, independente do tamanho da configuração de escoamento.

Especificamente o parâmetro adimensional Deborah (De) refere-se ao efeito de memória dum fluido em escoamento. A “memória” dum fluido refere-se, de maneira geral, aos efeitos viscosos e/ou elásticos do mesmo [BAR93]; por exemplo, o grande efeito de memória dum óleo lubrificante numa engrenagem (num cârter de trator) comporta-se como sólido elástico mesmo sofrendo rápidos processos de deformação (viscosidade e tensões, por exemplo) devido a variações de velocidade. Vale salientar que para processos com baixo número de De a influência da “memória do fluido” no processo de escoamento pode ser negligenciada, sendo possível usar um modelo para fluido Newtoniano.

Os modelos considerados aqui compreendem um conjunto de equações de Navier com as relações constitutivas complementares, as quais são resolvidas de forma segregada. Faz-se as seguintes hipóteses:

- Escoamento incompressível;
- Bidimensional;
- Não isotérmico.

Portanto, o sistema de equações compreende um conjunto de 4 equações, das quais 2 do tipo Navier para as velocidades “u” e “v”, 1 para a pressão do tipo Poisson, obtida a partir

das equações para as velocidades e 1 para a temperatura obtida da 1ª lei da termodinâmica. Além dessas, utiliza-se 3 equações complementares para as tensões normais  $\tau_{xx}$  e  $\tau_{yy}$  e a tensão tangencial  $\tau_{xy}$ . Essas últimas caracterizam o tipo de fluido viscoso utilizado pela presença do número adimensional de Deborah.

Resolve-se numericamente estas 7 equações de forma segregada utilizando os métodos de Runge-Kutta de 3 estágios para as velocidades e a temperatura, Relaxações Sucessivas para a pressão, e para as tensões resolve-se de forma direta pelo uso da sua expressão matemática (definição).

A aproximação das derivadas destas equações é por diferenças-finitas, a qual baseia-se na expansão em séries de Taylor em pontos discretos do domínio computacional. Como considerar um número infinito de termos é impraticável computacionalmente [WEN96], faz-se necessário truncar a série. Esta técnica de aproximação vem sendo usada desde a década de 60 [ROA71], para vários tipos de escoamento. Entretanto, requer cuidado especial no que se refere à distância entre os pontos (tamanho das células); aconselha-se usar  $\Delta x \times \Delta y \cong 1$ , com tolerância de  $\pm 20\%$  [DeB00].

Quanto à estrutura do trabalho, no capítulo 2 define-se as equações governantes, constituindo-se num conjunto de expressões matemáticas e relações constitutivas complementares, estas últimas caracterizam o tipo de fluido, com base na hipótese do *continuum*, para escoamentos de fluidos viscosos e com hipóteses simplificadoras (incompressível, bidimensional e não-isotérmico). Discute-se também a importância de apresentá-las na forma adimensional.

No capítulo 3, descreve-se o método de aproximação de diferenças finitas, a obtenção da malha computacional, o sistema de coordenadas generalizadas e os métodos de solução de Runge-Kutta e Relaxações Sucessivas, bem como a convergência e a estabilidade destes métodos. Apresenta-se, também, uma descrição do algoritmo computacional desenvolvido.

Os resultados das simulações de fluidos viscosos (Newtonianos e não-Newtonianos), são apresentados no capítulo 4 na forma de isothermas, perfis variados e linhas de corrente, para os casos de escoamentos entre placas paralelas (Couette) e cilindros. Entre os cilindros admite-se uma excentricidade (deslocamento em relação aos centros dos cilindros) e rotação do interno, em alguns escoamentos.

Finalmente, no capítulo 5 apresenta-se a avaliação da técnica utilizada com base nos objetivos pré-estabelecidos e perspectivas de trabalhos futuros.

## **2. MODELOS MATEMÁTICOS**

### **2.1 INTRODUÇÃO**

As equações governantes em Mecânica dos Fluidos consistem de um conjunto básico e relações constitutivas complementares. Num escoamento isotérmico o conjunto compreende a equação da continuidade, provinda do princípio da conservação da massa e a equação da quantidade de movimento, a qual surge da aplicação da 2ª Lei de Newton a um elemento infinitesimal (ou princípio do balanço da quantidade de movimento ou forças).

Considerando que este conjunto de equações seja o mesmo para todos os materiais, as relações constitutivas complementares em geral variam de um material (não) Newtoniano a outro (e, possivelmente, dum tipo de escoamento a outro). Neste ponto distinguem-se a Mecânica dos Fluidos não-Newtoniana da Mecânica dos Fluidos Clássica, onde o uso da lei da viscosidade de Newton resulta às equações de Navier-Stokes que são válidas para fluidos viscosos Newtonianos (ar e água).

### **2.2 CONJUNTO DE EQUAÇÕES**

As situações de escoamentos consideradas neste trabalho, tanto para fluidos viscosos na maioria Newtonianos (convecção natural e mista) e não-Newtonianos, referem-se a fluidos incompressíveis modelados em duas dimensões. O interesse principal é estabelecer o comportamento do escoamento conforme análise das propriedades físicas pressão, velocidade e temperatura. Para tanto, há necessidade de trabalhar com um conjunto de 4 equações acopladas de forma segregada, ou seja, 2 equações para as velocidades “u” e “v”, uma para a pressão e outra para a temperatura. Nesta seção deduz-se matematicamente tais equações com base em princípios físicos.

### 2.2.1 Equação da Continuidade

Sabe-se que a matéria consiste de moléculas, átomos e íons em constante movimento. Mas, descrever ou simular o comportamento de cada molécula em determinado instante de tempo, do ponto de vista prático, é quase impossível e geralmente desnecessário, porque o interesse é o entendimento dos efeitos macroscópicos do movimento molecular tais como velocidade, pressão e/ou temperatura, ou seja, dum grande número de moléculas.

Adota-se, neste ponto, uma aproximação macroscópica baseada no conceito de *continuum*. Admite-se que a distância entre as partículas fluidas (livre caminho médio) seja muito pequena, menor do que qualquer dimensão física do problema ao qual estamos aplicando os princípios da mecânica dos fluidos. Por exemplo, o livre caminho médio das partículas do fluido que escoam entre dois cilindros é muito menor que a diferença entre os raios dos cilindros. Desta forma, admite-se que qualquer volume de fluido possa ser continuamente subdividido em volumes cada vez menores, mantendo a característica contínua do mesmo [HUG79].

A equação da continuidade pode ser obtida considerando um volume infinitesimal de fluido fixo no espaço (veja Fig. 2.1).

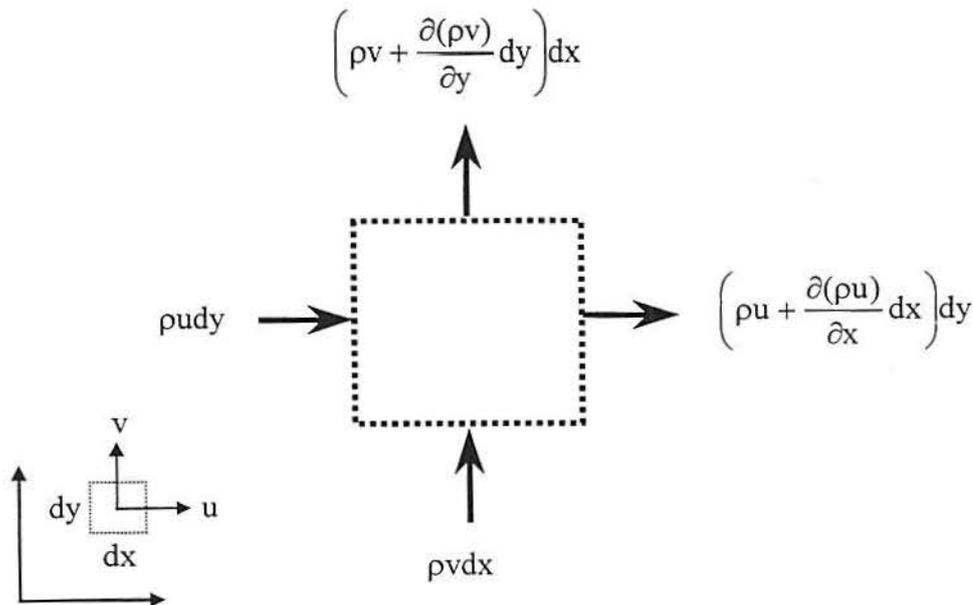


Fig. 2.1 – Conservação da massa num elemento infinitesimal bidimensional.

Para que haja conservação da massa (devido ao escoamento em cada face do volume) a taxa de variação de massa no interior do volume de controle deve compensar o fluxo líquido através das superfícies de controle. Dessa forma, a conservação expressa na forma vetorial é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{v}) = 0. \quad (2.1)$$

Para um fluido incompressível a massa específica  $\rho$  é aproximadamente constante, assim obtém-se a equação da continuidade:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0. \quad (2.2)$$

### 2.2.2 Equação da Quantidade de Movimento

A equação da quantidade de movimento pode ser obtida/deduzida ao aplicar o balanço a um elemento infinitesimal de fluido, a 2ª Lei de Newton (Fig. 2.2):

$$\bar{F} = m \bar{a}. \quad (2.3)$$

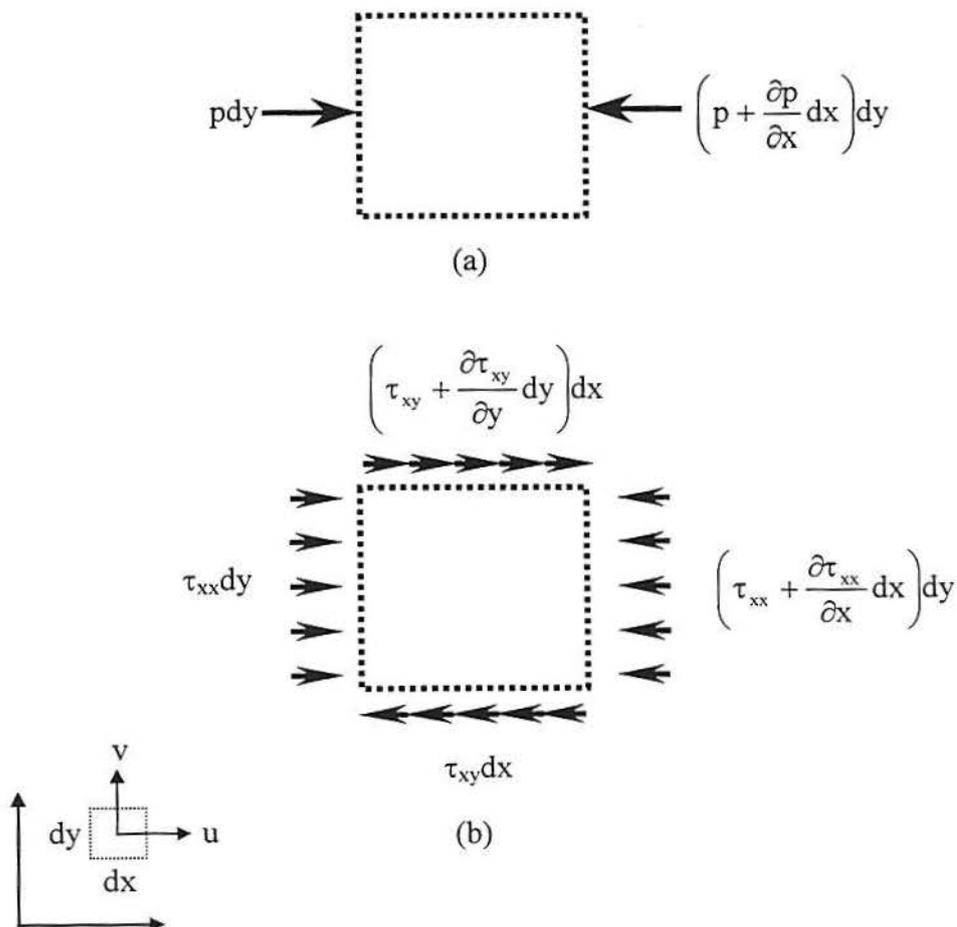


Fig. 2.2 – Forças associadas a um elemento infinitesimal de fluido que agem na direção  $x$ , devido à (a) pressão e à (b) tensão.

A 2ª Lei de Newton, na sua forma mais geral, pode ser vista como uma equação da conservação da quantidade de movimento (ou *momentum*), sendo a força resultante igual à taxa de variação de quantidade de movimento. Considera-se um elemento infinitesimal bidimensional que se desloca com o escoamento, como ilustra a Fig. 2.2.

Analisa-se as componentes de força que agem neste elemento em cada direção. Dentre os tipos de força distinguem-se duas delas:

- Forças de Corpo (ou Campo): São forças ( $f_x$  e  $f_y$ ) que agem diretamente sobre a massa ou volume de fluido à distância [SHA73, SHI90]. Exemplos: campo gravitacional e aplicação dum potencial eletromagnético (magnetohidrodinâmica).
- Forças de Superfície: São forças que agem diretamente por contato com o elemento de fluido através das faces do volume de controle. Pode-se distinguir componentes normais às faces (como pressão “p” e as tensões normais  $\tau_{xx}$  e  $\tau_{yy}$ ) e as tangenciais ( $\tau_{yx}$  e  $\tau_{xy}$ ) [WEN96].

Executando um balanço de forças na direção x, obtém-se

$$\sum F_x = \left[ p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy + \left[ \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) - \tau_{xx} \right] dy + \left[ \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) - \tau_{xy} \right] dx + f_x dx dy \quad (2.4)$$

que resulta em,

$$\sum F_x = \left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] dx dy + f_x dx dy. \quad (2.5)$$

A massa do elemento de fluido nesta face é dada por  $\rho dx dy$  (considera-se  $dz=1$ ); logo a aplicação da 2ª lei de Newton na direção x, para um elemento de fluido em movimento com o fluxo é representado por

$$\left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] dx dy + f_x dx dy = \rho dx dy \frac{Du}{Dt}, \quad (2.6)$$

resultando,

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] + f_x. \quad (2.7)$$

De maneira análoga obtém-se a equação na direção y

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right] + f_y. \quad (2.8)$$

Substituindo a relação para a derivada total (ou substantiva) obtém-se as expressões (2.9) e (2.10) para um fluido incompressível,

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x, \quad (2.9)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + f_y. \quad (2.10)$$

As tensões no fluido são modeladas conforme o material (fluido), isto é, as relações constitutivas complementares que variam dum material a outro. Para fluidos em que a relação tensão-deformação é linear (Newtonianos) faz-se a hipótese de Stokes e para fluidos cuja deformação não é linear (não-Newtonianos) faz-se hipóteses de acordo com as características do material considerado. Essas equações serão apresentadas e discutidas na seção 2.3, enquanto a obtenção da equação de Poisson para a pressão é apresentada no que segue.

### 2.2.3 Equação da Pressão

Descreve-se, aqui, um procedimento para obtenção da equação para a pressão do tipo Poisson a partir das equações de conservação da quantidade de movimento. Vale salientar que este procedimento serve para escoamentos incompressíveis (a baixa velocidade); pois no caso compressível é necessário que tanto a massa específica como a velocidade sejam mantidas ativas (correlacionadas) na equação da pressão [MAL95], mas isto foge do objetivo do trabalho.

Considera-se as equações da quantidade de movimento (2.9) e (2.10), sem as forças de corpo, ou seja,

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2.11)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}. \quad (2.12)$$

Derivando a primeira (Eq. 2.11) em relação a x e a segunda (Eq. 2.12) em relação a y, resulta

$$\rho \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 (uu)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (vu)}{\partial x \partial y} \right] = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (2.13)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 (uv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (vv)}{\partial y^2} \right] = -\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial y^2}, \quad (2.14)$$

e adicionando as equações (2.13) e (2.14), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \rho \left[ \frac{\partial^2 (uu)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (uv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (vv)}{\partial y^2} \right] \\ + \left[ \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial y^2} \right] + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

que pode ser reescrita admitindo  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = D \right)$ , obtendo-se a equação para a pressão do tipo

Poisson para escoamento de fluidos incompressíveis

$$\nabla^2 p = \rho \left[ \frac{\partial^2 (uu)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (uv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (vv)}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (2.16)$$

Resta agora obter a equação para a temperatura visando considerar modestas variações da mesma. Salienta-se que variações muito grandes da temperatura implicariam em compressibilidade do fluido [BEJ84, INC92].

#### 2.2.4 Equação da Temperatura

Define-se, nesta secção, a equação da temperatura a partir da conservação da energia. Esta pode ser obtida segundo o balanço expresso pela 1ª lei da Termodinâmica:

$$\Delta E = Q + W, \quad (2.17)$$

onde  $\Delta E$  é a taxa de variação da energia,  $Q$  o fluxo de calor e  $W$  o trabalho realizado pelas forças externas (de corpo e de superfície)

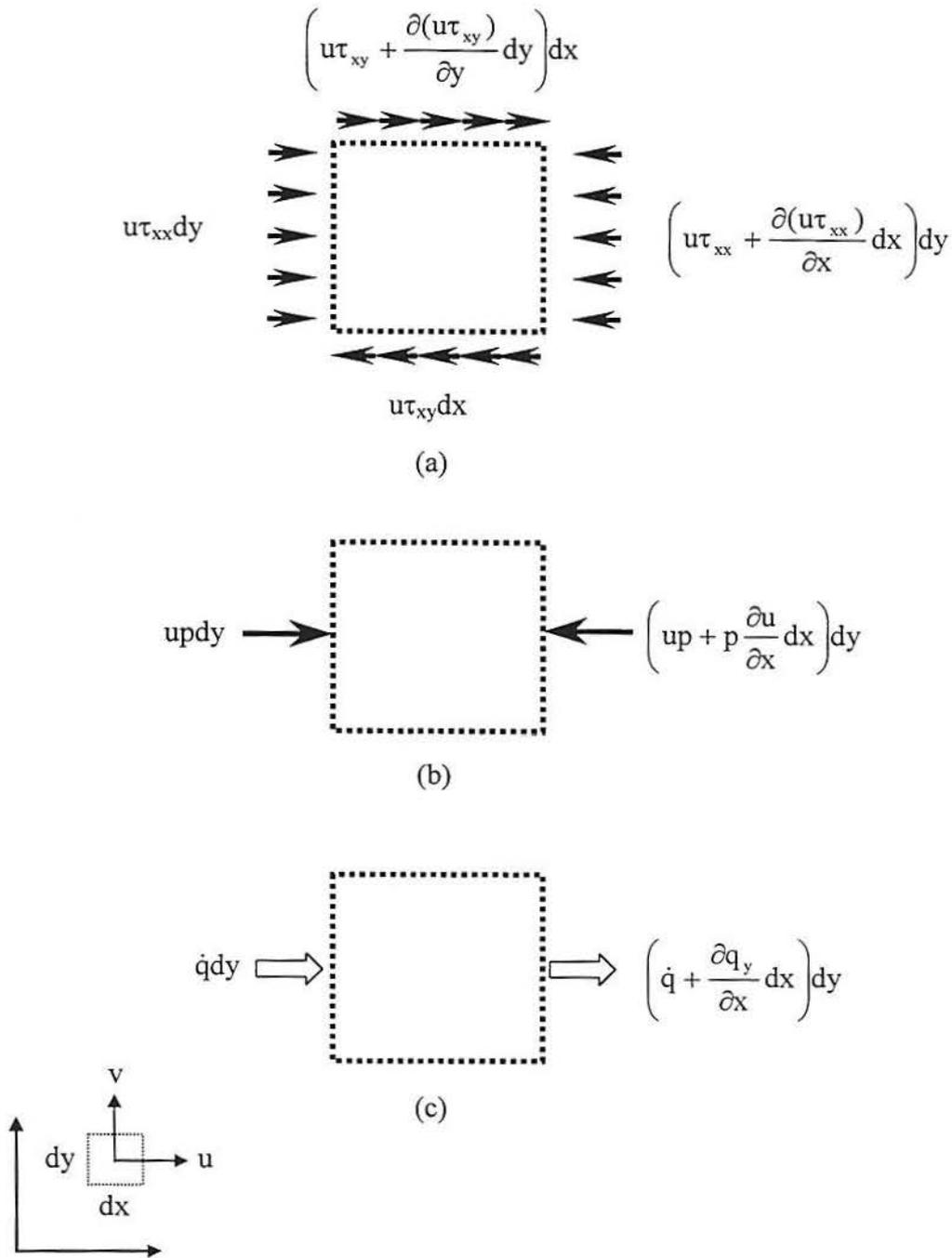


Fig. 2.3 – 1ª Lei da Termodinâmica aplicada a um elemento infinitesimal bidimensional: (a) tensão, (b) pressão e (c) fluxo de calor.

O trabalho (na direção  $x$  e  $y$ ) realizado por unidade de volume, ao admitir pressão absoluta, é dado pela seguinte expressão

$$W = \left[ -p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xy})}{\partial y} \right] + \left[ -p \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} \right]. \quad (2.18)$$

O fluxo de calor gerado, por unidade de volume, deve-se a duas parcelas: uma associada ao elemento material (por exemplo: radiação ou reação química) e outra devido à condução através da superfície,

$$Q = \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (2.19)$$

A taxa de energia acumulada no elemento infinitesimal, por unidade de volume, é

$$\Delta E = \rho \frac{D(e)}{Dt}. \quad (2.20)$$

Logo, a equação da energia escrita na forma vetorial é dada por

$$\rho \frac{D(e)}{Dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\tau}) + \rho \dot{q} + \vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} T). \quad (2.21)$$

Da difusão termodinâmica da entalpia  $\left( h = e + \left( \frac{1}{\rho} \right) p \right)$ , variação em relação ao tempo “t”,

tem-se que

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}. \quad (2.22)$$

Substituindo (2.22) em (2.21) resulta

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\tau}) + \rho \dot{q} + \vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} T),$$

ou ainda,

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) + \frac{Dp}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\tau}) + \rho \dot{q} + \vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} T).$$

Mas, pelo princípio da conservação da massa dada pela equação da continuidade, Eq. (2.1), obtém-se

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\tau}) + \rho \dot{q} + \vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} T). \quad (2.23)$$

Considera-se ainda a relação de estado apresentada por Bejan [BEJ95]

$$dh = C_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) dp, \quad (2.24)$$

onde  $C_p$  é o calor específico a pressão constante e  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica. Ao derivar a mesma em relação ao tempo e substituindo em (2.23), obtém-se

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{DT}{Dt} &= \frac{Dp}{Dt} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}) + \rho \dot{q} + \bar{\nabla} \cdot (\kappa \bar{\nabla} T) - (1 - \beta T) \frac{Dp}{Dt}, \\ \rho C_p \frac{DT}{Dt} &= \beta \frac{Dp}{Dt} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}) + \rho \dot{q} + \bar{\nabla} \cdot (\kappa \bar{\nabla} T). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Considera-se, neste trabalho, fluidos com condutividade constante  $\kappa$ , sem geração interna de calor ( $\dot{q} = 0$ ) e incompressíveis (negligencia-se os efeitos de compressibilidade  $\beta Dp/Dt$ ). Logo, a equação da energia na forma da temperatura fica:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}). \quad (2.26)$$

Salienta-se que para os casos de lubrificantes e fluidos muito viscosos deve-se considerar o calor interno gerado devido à dissipação viscosa  $\bar{\nabla} \cdot (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}})$ . Um estudo do comportamento de fluidos não-Newtonianos e das possíveis relações constitutivas complementares, para o cálculo das tensões presentes nas expressões (2.9), (2.10), (2.16) e (2.26), são apresentadas na próxima seção.

## 2.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS COMPLEMENTARES

Em se tratando de escoamentos de fluidos viscosos incompressíveis, como já mencionado, são necessárias relações constitutivas complementares que melhor descrevam os fluxos considerados. Nesta seção estabelece-se modelos para fluidos Newtonianos, pelo uso da lei da viscosidade de Newton e para fluidos não-Newtonianos, segundo a lei da mecânica de Ostwald de Waele, modelos de Bingham, de Herschet-Bulkley, modelo de Maxwell, *Upper-Convected Maxwell*, entre outros.

### 2.3.1 Fluidos Newtonianos

O comportamento de fluidos Newtonianos caracteriza-se por uma direta proporcionalidade entre tensão e taxa de cisalhamento (deformação). Assumindo que  $x$  é a direção do escoamento,  $y$  a variação da velocidade e  $z$  a direção neutra; tem-se

$$\begin{aligned} u &= u(y), \\ v &= w = 0. \end{aligned}$$

A medida do estado dinâmico local da deformação, ou seja, tensor tensão é dado por

$$\tau = \tau_{xy} \quad (2.27)$$

e a medida do estado cinemático local é a taxa de cisalhamento (movimento numa camada material relativa às camadas adjacentes paralelas) conforme

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}, \quad (2.28)$$

onde  $\tau_{xy}$  representa a componente da tensão de cisalhamento na direção  $x$  sobre a superfície normal  $y$ . Durante o escoamento de um fluido Newtoniano tem-se a seguinte relação

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (2.29)$$

sendo  $\mu$  a viscosidade Newtoniana a temperatura e pressão constantes. Esta equação é conhecida como lei de Newton para a viscosidade.

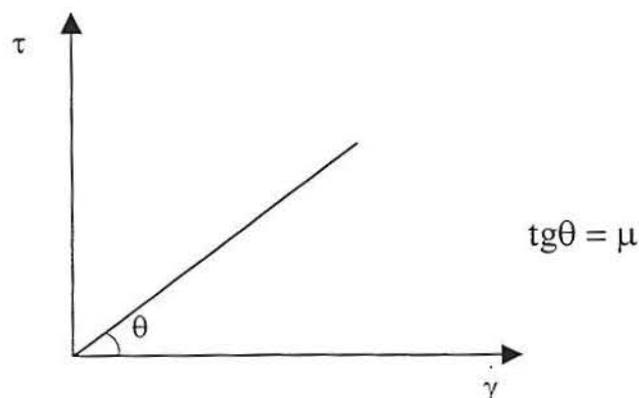


Fig. 2.4 – Relação tensão-deformação segundo a Lei da Newton para a viscosidade.

### 2.3.2 Comportamento de Fluidos não-Newtonianos

Distingue-se duas categorias de fluidos não-Newtonianos. A primeira descreve fluidos sem o chamado ganho de tensão e a segunda descreve aqueles que exibem ganho de tensão [FER91]. “Ganho de tensão” é uma tensão de cisalhamento limite em que o material (fluido) inicia o escoamento.

As propriedades viscosas dos fluidos sem ganho de tensão são descritas por curvas do tipo (a) - (c):

Curva (a): curva do escoamento de fluidos Newtonianos, para o qual há uma direta proporcionalidade entre a tensão e a taxa de cisalhamento.

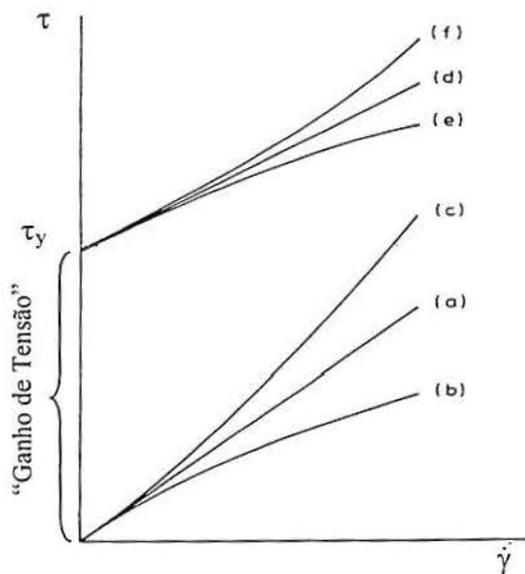


Fig. 2.5 – Comportamento de fluidos.

Curva (b): caracteriza fluidos na qual a tensão aumenta pouco em relação à taxa de cisalhamento. Tais fluidos são chamados de *shear thinning*. Por razões históricas são também chamados de fluidos dilatantes [FER91].

Curva (c): caracteriza fluidos onde a tensão aumenta mais que a taxa de cisalhamento. Tais fluidos são chamados de *shear thickening*. Tradicionalmente, fluidos desta categoria são descritos como pseudoplásticos.

Quando as propriedades viscosas do fluido produzem tensão, fluidos viscoplásticos, são descritos pelas curvas (d) – (f):

Curva (d): fluidos com estas propriedades viscosas podem ser chamados de plásticos de Bingham ou ideais. Estes podem suportar certa intensidade de cisalhamento sem deformação; após deformam-se proporcionalmente à tensão de cisalhamento.

Curvas (e) e (f): descrevem materiais que produzem tensões e o escoamento é não linear. Eles são chamados de fluidos viscoplásticos não lineares (ou não Bingham).

O modelo matemático das curvas do tipo (a) – (c) é definido pela lei da mecânica de Ostwald de Waele, ou também conhecida por *Power Law* [FER91].

$$\tau = K \dot{\gamma}^n, \quad (2.30)$$

onde “K” e “n” são parâmetros reológicos do modelo, fornecendo para:

- n < 1 : curva (b), pseudoplásticos
- n = 1 : curva (a), newtoniano
- n > 1 : curva (c), dilatantes

A curva do tipo (d) é descrita pelo modelo de Bingham conforme

$$\tau = \tau_y + \eta_p \dot{\gamma}^n, \quad (2.31)$$

onde a produção (ganho) de tensão  $\tau_y$  e a viscosidade plástica  $\eta_p$  são os parâmetros reológicos do modelo.

Finalmente, os escoamentos característicos às curvas não lineares de fluidos viscoplásticos (e) e (f) são descritos pelo modelo de Herschel-Bulkley [FER91]

$$\tau = \tau_y + K \dot{\gamma}^n \quad (2.32)$$

com três parâmetros reológicos:  $\tau_y$ , K e n.

Há vários modelos que descrevem as propriedades viscosas de fluidos não-Newtonianos. De acordo com opiniões [FER91], entretanto, os modelos apresentados acima são mais simples, sendo usados em aplicações pela sua eficiência.

### 2.3.3 Modelos Mecânicos

Pode-se escrever de forma simples o comportamento do material viscoelástico durante o escoamento usando os chamados modelos mecânicos. Tais modelos são construídos combinando elementos que representam o comportamento reológico ideal: uma deformação Hookeana elástica e um escoamento Newtoniano viscoso.

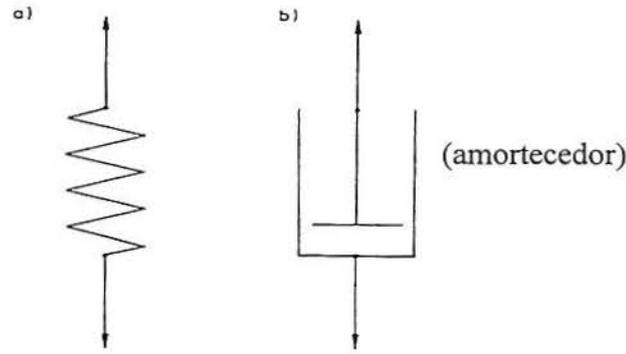


Fig. 2.6 – Modelos mecânicos do comportamento ideal reológico  
(a) elemento Hookeano, (b) elemento Newtoniano.

O elemento Hookeano é ilustrado como uma mola em que a força (representando a tensão) é proporcional à extensão (representando o cisalhamento)

$$\tau_s = G_s \gamma_s, \quad (2.33)$$

onde  $G_s$  é o módulo de elasticidade. O elemento Newtoniano é ilustrado como um amortecedor (*dashpot*) consistindo de um cilindro mergulhado num fluido viscoso. Em tal elemento a força é proporcional à taxa de extensão (representando a taxa de cisalhamento):

$$\tau_d = 2\eta_d \frac{d\gamma_d}{dt}, \quad (2.34)$$

onde  $\eta_d$  é o coeficiente de viscosidade.

O comportamento de materiais viscoelásticos pode ser descrito combinando os elementos Hookeanos e Newtonianos em série ou em paralelo, como o modelo de Maxwell.

#### 2.3.4 Modelo de Maxwell

O Modelo de Maxwell consiste dos elementos Hookeanos e Newtonianos combinados em série. Para tal modelo a tensão de cisalhamento é igual para ambos os elementos e a deformação relativa (referente ao comprimento) é a soma das deformações relativas de ambos os elementos:

$$\tau_s = \tau_d = \tau, \quad (2.35)$$

$$\gamma_s + \gamma_d = \gamma. \quad (2.36)$$

Diferenciando a equação (2.36) em relação ao tempo, tem-se

$$\frac{d\gamma_s}{dt} + \frac{d\gamma_d}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}. \quad (2.37)$$

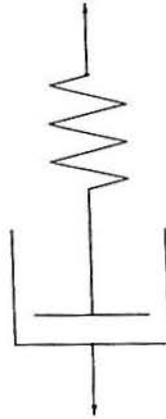


Fig. 2.7 – Modelo de Maxwell.

Diferenciando a equação (2.33) em relação ao tempo e utilizando a equação (2.34), podemos rescrever a equação (2.37) da forma

$$\frac{1}{G_s} \frac{d\tau_s}{dt} + \frac{\tau_d}{2\eta_d} = \frac{d\gamma}{dt}. \quad (2.38)$$

Com base na equação (2.35), a equação (2.38) também pode ser escrita como

$$\frac{1}{G_s} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{2\eta_d} = \frac{d\gamma}{dt}, \quad (2.39)$$

ou multiplicando ambos os lados da equação (2.39) por  $2\eta_d$  resulta

$$\frac{2\eta_d}{G_s} \frac{d\tau}{dt} + \tau = 2\eta_d \frac{d\gamma}{dt}. \quad (2.40)$$

A razão  $2\eta_d/G_s$  tem a dimensão do tempo. Usando para um material viscoelástico real os seguintes símbolos:

$$\frac{2\eta_d}{G_s} = \lambda, \quad \eta_d = \eta, \quad \frac{d\tau}{dt} = \dot{\tau} \quad \text{e} \quad \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma},$$

a equação de Maxwell é obtida:

$$\lambda \dot{\tau} + \tau = 2\eta\dot{\gamma}. \quad (2.41)$$

De acordo com a equação (2.41) a tensão  $\tau$  depende da taxa de cisalhamento. Assim, o modelo de Maxwell ilustra o comportamento reológico de fluidos viscoelásticos. À tensão extra constante (quando  $\dot{\tau} = 0$ ) na equação (2.41) reduz-se a  $\tau = 2\eta\dot{\gamma}$ , isto é, a relação para um fluido Newtoniano. Para duas dimensões tem-se  $\dot{\gamma} = \overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} \left[ \overline{\overline{V}}\overline{\overline{u}} + (\overline{\overline{V}}\overline{\overline{u}})^T \right]$ .

### 2.3.5 Relaxação para um Fluido de Maxwell

Considerando um fluido que segue o modelo de Maxwell sob cisalhamento e assumindo que  $\dot{\gamma} = 0$  num dado instante  $t = 0$ , observa-se que ocorre variações nas tensões no decorrer do tempo. Para  $\dot{\gamma} = 0$ , a equação (2.41) tem a forma

$$\lambda \dot{\tau} + \tau = 0. \quad (2.42)$$

Separando as variáveis e integrando, com a condição inicial  $\tau = \tau_0$  em  $t = 0$ , tem-se

$$\int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\tau} = -\frac{1}{\lambda} \int_0^t dt,$$

isto é,

$$\ln \frac{\tau}{\tau_0} = -\frac{t}{\lambda},$$

ou ainda

$$\tau = \tau_0 \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right). \quad (2.43)$$

Segue da equação (2.43) que a tensão decai a  $\tau_0$  em  $t = 0$ , e tende a 0 para  $t \rightarrow \infty$ . O tempo  $\lambda$  caracteriza a velocidade de decréscimo da tensão e, portanto, é chamado de “tempo de relaxação”.

### 2.3.6 Variações do Modelo de Maxwell

O comportamento de fluidos viscoelásticos pode variar dependendo das condições de escoamento, isto é, não existe uma única relação constitutiva capaz de descrever (predizer) todos os comportamentos observados em fluidos viscoelásticos [RED94]. Os modelos enfatizados aqui são da forma diferencial; relatam a tensão e a taxa de cisalhamento para escoamentos.

Relações constitutivas simples podem ser obtidas para representar os comportamentos *upper convected* (maior taxa de cisalhamento) e *lower convected* (menor taxa de cisalhamento), conforme Reddy e Gartling [RED94] para modelos de Maxwell  $\tau_{ij} + \lambda \dot{\tau}_{ij} = 2\eta_0 D_{ij}$ , segundo as seguintes expressões para tensão extra:

*Upper Convected Maxwell (UCM)*

$$\bar{\tau}_{ij} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \tau_{kj} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \tau_{ki}, \quad (2.44)$$

*Lower Convected Maxwell (LCM)*

$$\tilde{\tau}_{ij} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \tau_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \tau_{ki}. \quad (2.45)$$

A expressão para a forma correlacional [OLD58, BIR77, CRO84, BAR93] é dada por

$$\hat{\tau}_{ij} = \left(1 - \frac{a}{2}\right) \bar{\tau}_{kj} + \left(\frac{a}{2}\right) \tilde{\tau}_{ki}, \quad (2.46)$$

que nada mais é que uma equação que pondera a característica *upper* ou *lower* descritos anteriormente.

Obtém-se para:

$a=0$  a relação de *Upper Convected*,

$a=2$  a relação de *Lower Convected*,

$a=1$  a relação de correlacional (*corotational*).

O modelo UCM é frequentemente usado em simulações numéricas como exemplo por Crochet [CRO84], Beris [BER86, BER87], Li e Davies [LI94] e Tichy [TIC96]; já a forma

correlacional de fluidos de Maxwell apresenta componentes fisicamente inconsistentes e não é geralmente usada [RED94]. A relação (2.46) na sua forma mais geral produz o modelo de *Johnson-Segalman* [TAN92, CRO84]

$$\tau_{ij} + \lambda \hat{\tau}_{ij} = 2\eta_0 D_{ij}. \quad (2.47)$$

O modelo acima pode ser levemente modificado ao incluir um coeficiente para  $\tau_{ij}$ , resultando o modelo de *Phan Thien-Tanner* [TAN92]

$$Y(\tau)\tau_{ij} + \lambda \hat{\tau}_{ij} = 2\eta_0 D_{ij}, \quad (2.48)$$

onde  $Y(\tau) = 1 + \frac{\zeta\lambda}{\eta_0} \text{tr}(\tau)$  e “ $\zeta$ ” é uma constante reológica.

Os modelos *Johnson-Segalman* e *Phan Thien-Tanner* possuem um defeito comum em que, para um aumento monotônico da taxa de cisalhamento, surge uma região de decréscimo da tensão de cisalhamento, o que é fisicamente inconsistente [RED94].

Existem outros modelos de relações constitutivas além dos apresentados, sendo usados para trabalhos computacionais, entre eles o modelo de *White-Metzner* o qual também é freqüentemente usado em simulações. Os modelos aqui apresentados são generalizações simples dos modelos de viscoelasticidade linear; entretanto, modelos mais complexos que fazem analogias de leis mecânicas e argumentações heurísticas, ou que usam mecanismos estatísticos ideais e modelos conceituais de microestruturas para fluidos viscoelásticos são também usados por pesquisadores [TAN92]. Neste trabalho simula-se computacionalmente para algumas situações o modelo *Convected Maxwell* apresentado por [TIC96]:

$$\tau_{ij} + \lambda \left\{ v_m \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_m} - \left[ \tau_{im} \frac{\partial v_j}{\partial x_m} \right]^T - \tau_{im} \frac{\partial v_j}{\partial x_m} \right\} = \mu \left[ \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right], \quad (2.49)$$

ou:

$$\tau_{xx} + \lambda \left( u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \tau_{xx} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} \right) = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.50)$$

$$\tau_{xy} + \lambda \left( u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} - \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xx} \right) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.51)$$

$$\tau_{yy} + \lambda \left( u \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \tau_{yy} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xy} \right) = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.52)$$

Visando um melhor entendimento dos processos de transferência de calor tem-se, na próxima seção, um estudo dos fenômenos ligados a esse tópico.

## 2.4 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO

A transferência de calor por convecção em ambientes fechados [KEL00] é um tópico de importância contemporânea na engenharia e sistemas geofísicos. Neste trabalho objetiva-se considerar o fenômeno de convecção natural e mista para fluidos Newtonianos visando calibrar o código computacional para a transferência de calor no caso de cilindros excêntricos e “parados”, ou seja, velocidade angular igual a zero, caracterizando um problema de convecção natural, e para a situação onde o cilindro interno está em movimento, caracterizando um processo de convecção mista.

Nas próximas seções discute-se a transferência de calor por convecção, a aproximação de Boussinesq e o modelo matemático para o caso de convecção combinada (mista).

### 2.4.1 Notações

O calor, que nada mais é que energia térmica dissipada (em trânsito), pode ser transferido por condução, convecção e radiação. Na transferência de calor por condução a energia passa de molécula para molécula principalmente sem que elas sejam deslocadas. O processo de transmissão de energia por radiação não precisa de um meio material sólido para se propagar; a energia radiante é transmitida através de ondas eletromagnéticas [INC92]. A propagação de calor nos líquidos ou gases ocorre por efeito de camadas aquecidas ou correntes de convecção.

O estudo de fenômenos relacionados à convecção é classificado da seguinte forma:

- a) Convecção Natural (ou livre): a causa do movimento é a ação da gravidade no fluido de massa específica e temperatura variáveis. A velocidade do fluido é pequena caracterizando um fluxo de caráter elíptico. Nesta categoria o escoamento pode ser laminar ou turbulento, dependendo das circunstâncias. Exemplos de aplicações são o fluxo em chaminés, radiadores, entre outros.
- b) Convecção Forçada: aqui a causa do movimento é uma ação externa. A velocidade é geralmente dominante, isto é, possui carácter parabólico. A aplicação em indústrias onde tem-se fluxo de calor turbulento é freqüente, como por exemplo em processos de resfriamento de líquidos refrigerantes.
- c) Convecção Mista (ou combinada): nesta categoria ocorre o processo de transferência de calor por convecção natural e forçada, na qual parâmetros adimensionais como Grashof e Reynolds indicam a tendência do escoamento ocorrer via convecção natural ou forçada. A convecção mista na verdade é uma característica da maioria dos fenômenos que envolvem energia dissipada, sejam eles fenômenos da natureza ou artificiais.

A tabela seguinte apresenta, de forma simplificada, as diferenças entre os tipos de convecção. Segue-se uma aproximação muito utilizada para problemas de convecção natural.

Tab. 2.1 - Caracterização das diferenças entre as convecções forçada e natural.

Convecção	Causa do movimento	Velocidade	Caráter
Forçada	Ação externa (Ex.: ventilador)	É geralmente dominante	Parabólico
Natural	Ação da gravidade no fluido (massa específica e temperatura variável)	Pequena	Elíptico

#### 2.4.2 Aproximação de Boussinesq

A aproximação de Boussinesq expressa o acoplamento entre o campo de temperatura e o campo de velocidade (escoamento). Esta definição é válida para casos de escoamentos em que o

gradiente de temperatura é pequeno, ou seja, naqueles em que a diferença de temperatura implica em pequena compressibilidade do fluido.

Considera-se as seguintes equações com a presença da força de corpo na equação da quantidade de movimento na direção  $y$  (EQM<sub>y</sub>):

$$\text{EQM}_x : \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}; \quad (2.53)$$

$$\text{EQM}_y : \rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \rho g; \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \text{ET} : \rho C_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \kappa \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xy})}{\partial y} + \\ \frac{\partial(v\tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

O esquema ilustrado pela Fig. 2.8, mostra o comportamento dum fluido Newtoniano inicialmente “parado” (estático) em um reservatório com uma das paredes em constante aquecimento (fluxo de calor positivo).

Admite-se que a pressão permanece constante numa região com pequena variação de temperatura. Desta forma, pode-se escrever

$$p(x, y) \cong p(y) = p_\infty(y). \quad (2.56)$$

De acordo com a Fig. 2.8 a distribuição da pressão no reservatório é hidrostática; portanto

$$\frac{dp_\infty}{dy} = -\rho_\infty g, \quad (2.57)$$

onde  $\rho_\infty$  é a massa específica do fluido no reservatório.

Substituindo (2.56) em (2.54) fica-se com

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + (\rho_\infty - \rho)g. \quad (2.58)$$

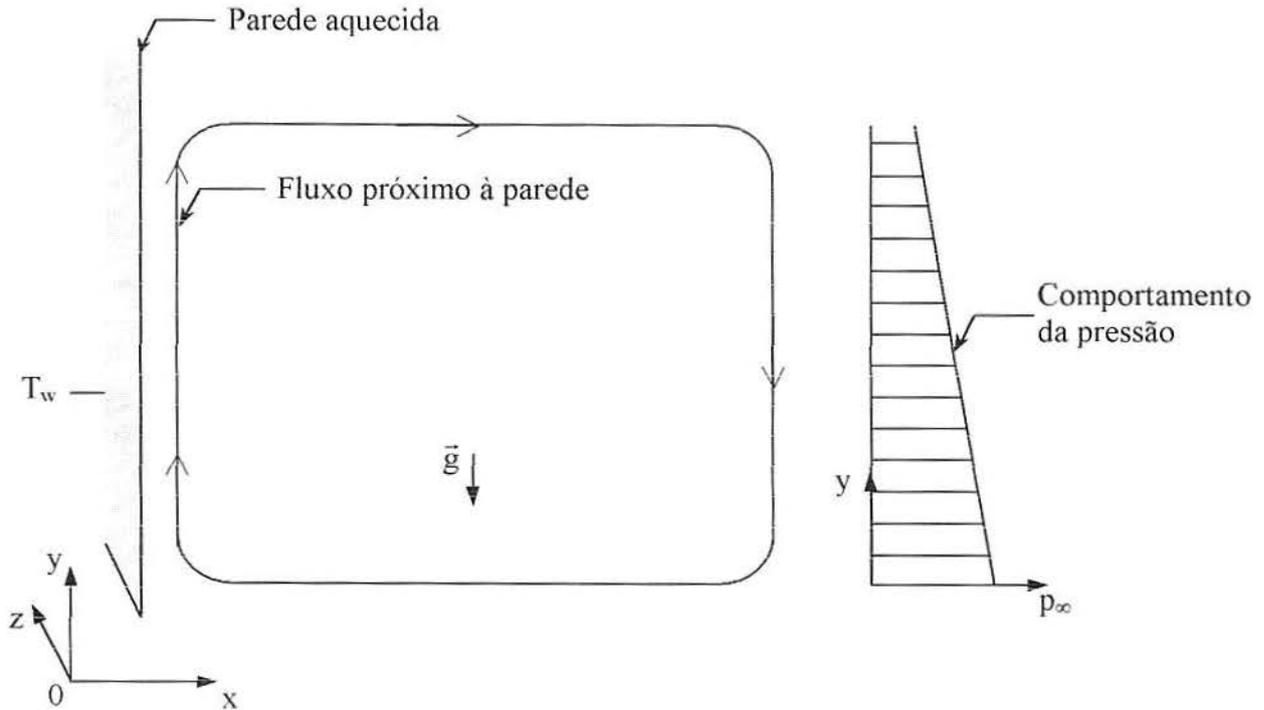


Fig. 2.8 – Fluxo devido à flutuação ao longo duma parede aquecida e distribuição de pressão num reservatório de fluido parado.

A temperatura aparece explicitamente na equação do movimento quando se usa a equação de estado da termodinâmica  $\rho = \rho(T, p)$ . Expandindo a massa específica em séries de Taylor para  $[\rho_\infty = \rho(T_\infty, p_0)]$ , obtém-se

$$\rho = \rho_\infty + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p (T - T_\infty) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T (p - p_\infty) + \dots \quad (2.59)$$

onde  $p_0$  é uma referência à pressão no fundo do reservatório.

Mas, a correção (diferença) da pressão é insignificante comparada com a correção da temperatura; portanto, a equação acima reduz-se a

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_\infty - \rho_\infty \beta (T - T_\infty) + \dots, \\ \rho &\cong \rho_\infty [1 - \beta (T - T_\infty)], \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica.

Note, também, o fato que a equação (2.60) é uma aproximação linear da equação de estado  $\rho = \rho(T, p)$ , quando se considera a massa específica de referência  $\rho_\infty(T_\infty, p_0)$  suficiente-

mente pequena, que é, quando a variação da temperatura é bastante pequena, implicando em [BEJ84, INC92]:

$$\beta(T - T_{\infty}) \gg 1. \quad (2.61)$$

Quando as propriedades do fluido variam com a temperatura na fronteira, concordância razoável entre o prognóstico baseado nesta teoria e a mensuração é obtida, se as propriedades do fluido são avaliadas na fina camada (camada limite térmica) de temperatura  $(T_w + T_{\infty})/2$ .

Substituindo a expressão para  $\rho$  em ambos os lados da equação da quantidade de movimento, obtém-se

$$\rho_{\infty} [1 - \beta(T - T_{\infty})] \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = \left[ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right] + \rho_{\infty} \beta(T - T_{\infty})g. \quad (2.62)$$

Considerando que  $\beta(T - T_{\infty}) \gg 1$  pode-se negligenciar o termo colocado em evidência (lembre que  $\rho_{\infty}$  pequeno); chega-se, assim, na equação do momento com a temperatura  $T$  no termo de flutuação,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \rho_{\infty} \beta(T - T_{\infty})g. \quad (2.63)$$

A linearização da relação de estado  $\rho = \rho(T, p)$ , equação (2.60), é reconhecida como a aproximação de Oberbeck-Boussinesq ou simplesmente aproximação de Boussinesq [BEJ84]. A presença da temperatura no termo de flutuação, ou melhor, flutuabilidade da equação do momento (2.63) associa o movimento com o campo de temperatura e vice-versa. Segundo Holman [HOL72] o fluido é dirigido pelo efeito da flutuabilidade e está associado à tendência do fluido (gás) de se expandir e em casos especiais de se contrair quando aquecido à pressão constante. Vale salientar, a fim de complementação, que pequenas variações de temperatura são suficientes para causar convecção natural ou mista.

A fim de tornar o procedimento de solução mais versátil para futuras comparações entre os resultados, faz-se o estudo da análise dimensional e apresenta-se as equações governantes adimensionalizadas.

## 2.5 ANÁLISE DIMENSIONAL

A experimentação em laboratório de escoamentos, em muitos casos, torna-se proibitiva devido ao seu alto custo e muitas vezes pelo seu risco de execução (ambiental e para a humanidade). Centrais nucleares, reentradas de veículos na atmosfera terrestre e turbinas de aviões são alguns exemplos. Para contornar estes problemas pode-se utilizar a análise dimensional, esta permitindo simulação similar às condições reais do fenômeno em questão.

A reentrada de veículos na atmosfera, por exemplo, pode ser simulada através de protótipos em piscinas d'água, na qual se pode reproduzir a alta pressão da reentrada pelo impacto do protótipo da nave na água da piscina; isso permite que pesquisadores tomem decisões mais seguras quanto à aerodinâmica, resistência da nave, etc.

A análise dimensional é uma ferramenta importante que quase sempre auxilia na redução de riscos e custos. Discute-se, nessa seção, a condição necessária para obter a similaridade adequada entre escoamentos reais e experimentais numéricos ou por protótipos, pelo estudo da natureza da análise dimensional e alguns grupos adimensionais.

### 2.5.1 Natureza da Análise Dimensional

A complexidade, que pode ser facilmente constatada nos fenômenos em mecânica dos fluidos, envolve características físicas, e muitas vezes químicas, do escoamento e de medidas geométricas. A fim de ilustração considere a queda de pressão num escoamento dentro de um tubo.

Que experiências devem ser feitas para determinar a queda de pressão dentro de um tubo, sendo que o escoamento é permanente, incompressível e viscoso? Listando as variáveis necessárias para determinar a queda de pressão  $\Delta p$ , tem-se [FOX98] o comprimento de tubo "L", a velocidade média  $\bar{U}$ , a viscosidade do fluido  $\mu$ , o diâmetro do tubo "d", a massa específica do fluido  $\rho$ , a variação média do raio interno  $\bar{r}$  e "e" a rugosidade. Simbolicamente tem-se que

$$\Delta p = f(L, \bar{U}, \mu, d, \rho, \bar{r}, e). \quad (2.64)$$

A determinação da dependência de  $\Delta p$  em relação às variáveis  $L$ ,  $\bar{U}$ ,  $\mu$ ,  $d$ ,  $\rho$ , e  $\bar{r}$ , exige uma bateria de experiências que podem ser feitas fixando a velocidade média e a massa específica (escoamento incompressível) e combinando as demais variáveis. A modificação de

uma das variáveis exige em torno de 10 experiências, devido a dificuldades de medida para obtenção dos dados. Isso significa que se têm aproximadamente  $10^4$  experimentos diferentes. Se for contabilizado o custo considerável destes experimentos, tal atividade pode se tornar inviável.

Contudo, pode-se obter resultados significativos com um custo e esforço muito menor pelo emprego da análise dimensional. Uma relação funcional para o problema da queda de pressão é apresentada na forma

$$\frac{\Delta p}{\rho \bar{U}^2} = f(L, \mu, d, e). \quad (2.65)$$

A viscosidade  $\mu$  presente nesta relação poderia ser verificada com apenas alguns testes, ao invés de aproximadamente  $10^4$  como havia-se previsto; assim não seria necessário construir dutos com diferentes diâmetros, comprimentos e rugosidade.

Imagine que se deseja determinar esse diferencial de pressão num duto com curvas e restrições. Neste caso, uma ferramenta poderosa baseada em algumas experiências feitas em laboratório é muito útil; trata-se da simulação numérica que considera a relação funcional mencionada, que pode ser feita exaustivamente a baixíssimo custo se comparado à complexidade (dificuldade) do fenômeno.

### 2.5.2 Alguns Parâmetros Adimensionais

Os parâmetros adimensionais, ou  $\Pi$ 's como menciona [HUG79], podem ser obtidos pelo método da análise dimensional ou diretamente das equações diferenciais. Obtém-se os parâmetros adimensionais partindo das equações diferenciais na próxima seção.

O surgimento dos parâmetros adimensionais estão relacionados à constatações experimentais feitas por grandes nomes da história da mecânica dos fluidos; cita-se algumas dessas personalidades e seus respectivos adimensionais.

Salienta-se aqui que dois escoamentos são semelhantes se os parâmetros adimensionais são todos iguais; independente do tamanho da configuração de escoamento, se mantém a semelhança geométrica.

*Osborne Reynolds* (década de 1880), engenheiro britânico, estudou a transição entre os regimes laminar e turbulento num tubo, descobrindo que o regime de diferentes escoamentos pode ser determinado pela relação, denominada posteriormente de número de Reynolds

$$Re = \frac{UL}{\nu} \approx \frac{\text{força inercial}}{\text{força viscosa}}. \quad (2.66)$$

Quando o número de Reynolds é pequeno ( $Re \ll 1$ ) as forças viscosas predominam, e quando  $Re \gg 1$  as forças de inércia predominam. Escoamento interno num tubo é laminar para  $Re \leq 2.300$ , enquanto que o escoamento externo é laminar numa placa plana para  $Re \leq 5 \times 10^5$  [SCH68].

O número de *Prandtl* (1907) é considerado uma propriedade do fluido importante na transmissão de calor por convecção; para a maior parte dos gases situa-se entre 0,6 e 1,0 e para líquidos viscosos como óleos acima de 1.000. Tabelas contendo a relação Prandtl e fluido podem ser encontrados na literatura como por exemplo em Fox e McDonald [FOX98], Bejan [BEJ95], Incropera e Witt [INC92], entre outros, para diferentes condições de temperatura e de pressão,

$$Pr = \frac{\mu \cdot Cp}{\kappa} = \frac{\nu}{\alpha} \approx \frac{\text{difusão viscosa}}{\text{difusão térmica}}. \quad (2.67)$$

A Fig. 2.9 ilustra os efeitos dum escoamento laminar para fluidos viscosos a baixa velocidade sobre uma parede aquecida. O comportamento num regime turbulento concorda qualitativamente com a mesma, mas há diferenças nos perfis [WHI91].

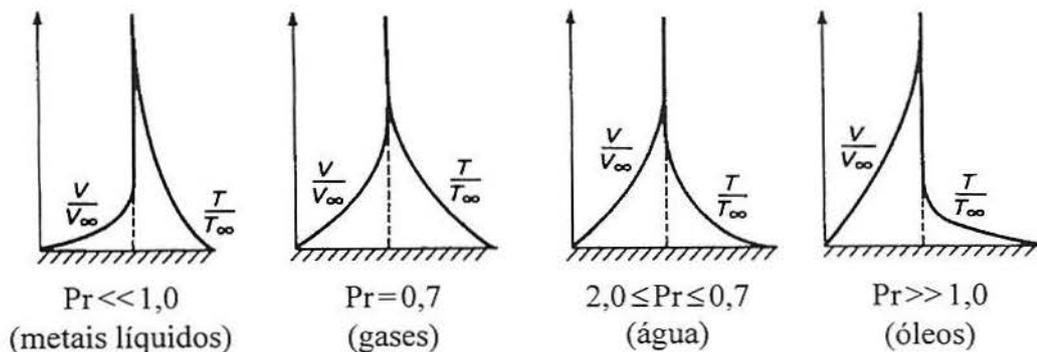


Fig. 2.9 – Efeitos do número de Prandtl na difusão térmica e viscosa [WHI91].

A influência da temperatura na difusão viscosa é menor quanto maior for o número de Prandtl e maior quanto menor for o número de Prandtl.

*Eckert*, usado para escoamentos onde há temperatura variável, acarretando num aumento de entropia que acaba interferindo na dissipação viscosa,

$$Ec = \frac{U^2}{C_p(T_w - T_\infty)} \approx \frac{\text{dissipação viscosa}}{\text{aumento de entropia}}, \quad (2.68)$$

é a razão entre a energia cinemática do escoamento e a diferença de entalpia na camada limite [INC92].

O número de *Grashof* é importante em correntes livres provocadas por flutuações, se existirem gradientes térmicos que causam gradientes de massa específica [BUR93]. Admite-se que o fluido é incompressível, com coeficiente de expansão volumétrica  $\beta$ , resultando:

$$Gr = \frac{g\beta\rho^2 L^3 (T_w - T_\infty)}{\mu^2} \approx \frac{\text{força de flutuação}}{\text{força viscosa}}. \quad (2.69)$$

*Lord Rayleigh* (1899) analisou o efeito da temperatura na viscosidade de um gás, ou seja, investigou a estabilidade mediante efeitos da temperatura em gases, resultando o adimensional:

$$Ra = \frac{g\beta H^3 \Delta T}{\alpha \nu} = Pr Gr. \quad (2.70)$$

Se o número de Rayleigh excede certo valor crítico, o escoamento torna-se instável [STR61], por exemplo, em cavidades (quadradas e retangulares) o valor crítico é  $10^6$ .

O número de *Deborah* (De) refere-se ao efeito de memória dum fluido em escoamento. Este adimensional é definido como razão da característica temporal do fluido pela característica temporal do processo. Ou seja, é a razão entre a característica temporal de deformação do fluido, relacionado à viscosidade (medida por viscosímetros) pela característica temporal de deformação durante o escoamento, relacionado aos tipos de resposta (elástica, viscosa e viscoelástica).

$$De = \frac{\lambda U}{L}. \quad (2.71)$$

Nos processos com baixo número de Deborah a influência da “memória” do fluido no processo de escoamento pode ser negligenciada e, portanto, as propriedades reológicas do mesmo podem ser aproximadas por um modelo de fluido Newtoniano. Para processos com alto

número de De, entretanto, para que ambas características temporais sejam comparáveis, a “memória” do fluido é importante.

O número de *Péclet* (Pe), também conhecido como número de Reynolds da célula, em homenagem ao físico francês J. C. E. Péclet [WHI91],

$$Pe = \frac{\rho UL}{\kappa} = Pr Re, \quad (2.72)$$

mede a razão entre as intensidades dos processos de convecção de difusão. Quanto maior o número de Péclet, maior a intensidade da convecção [FOR00].

Finalmente, o número de Biot (Bi) representa a relação entre a troca de calor por convecção e a difusão nas proximidades duma superfície,

$$Bi = \frac{h_e L}{\kappa}, \quad (2.73)$$

onde  $h_e$  é o coeficiente de transferência de calor externo.

### 2.5.3 Forma Adimensional das Equações Governantes

Mencionou-se anteriormente que os parâmetros adimensionais podem ser obtidos partindo das equações diferenciais, neste caso considere como exemplo a equação da Quantidade de Movimento na direção x (CQM<sub>x</sub>) sem a força de corpo,

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}. \quad (2.74)$$

Introduz-se as variáveis adimensionais que se seguem, independentes e dependentes (as dependentes indicadas por asteriscos),

$$t^* = \frac{tU_\infty}{L}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L} \quad u^* = \frac{u}{U_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{U_\infty}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U_\infty^2},$$

$$\tau_{xx}^* = \frac{\tau_{xx}}{\mu U_\infty / L}, \quad \tau_{xy}^* = \frac{\tau_{xy}}{\mu U_\infty / L}.$$

O procedimento de tornar adimensional a equação diferencial da CQM<sub>x</sub>, é feito da seguinte forma, considerando, como exemplo, quatro termos típicos desta equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(u/U_\infty)U_\infty}{\partial\left(\frac{U_\infty \cdot t}{L}\right)\frac{L}{U_\infty}} = \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t^*},$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = U_\infty \left(\frac{u}{U_\infty}\right) \frac{\partial(u/U_\infty)U_\infty}{\partial(x/L)L} = \frac{U_\infty^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial(y/L)L} \left[\frac{\partial(u/U_\infty)U_\infty}{\partial(y/L)L}\right] = \frac{U_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x'^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\tau_{xy}}{\mu U_\infty/L}\right)\frac{L}{\mu U_\infty}}{\partial(x/L)L} = \frac{\mu U_\infty}{L^2} \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x^*}.$$

Seguindo-se este procedimento, a equação diferencial da CQM<sub>x</sub> pode ser escrita como

$$\frac{\rho U_\infty^2}{L} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* u^*)}{\partial y^*} \right) = -\frac{\rho U_\infty^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu U_\infty}{L^2} \left( \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y^*} \right). \quad (2.75)$$

Dividindo a equação anterior (2.75) por  $\rho U_\infty^2/L$  obtém-se

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* u^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho U_\infty L} \left( \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y^*} \right),$$

onde a quantidade adimensional  $\frac{\mu}{\rho U_\infty L}$  é o inverso do parâmetro adimensional de Reynolds.

Por simplicidade, admite-se a seguinte equação adimensional para CQM<sub>x</sub> sem os indicadores asteriscos,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right). \quad (2.76)$$

De forma análoga à adimensionalização da equação CQM<sub>x</sub>, tem-se as demais equações adotadas neste trabalho na forma adimensional (veja deduções “Apêndice B”).

Conservação da Quantidade de Movimento na direção *y* com a aproximação de Boussinesq (CQM<sub>y</sub>B):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right] - \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}^2} T. \quad (2.77)$$

Equação da Pressão:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2(uu)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2(uv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(vv)}{\partial y^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (2.78)$$

com

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Equação da Temperatura:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = & + \frac{1}{\text{Pr Re}} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] + \\ & \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Relações constitutivas do modelo *Convected Maxwell*:

$$\tau_{xx} + \text{De} \left( u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \tau_{xx} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} \right) = 2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.80)$$

$$\tau_{xy} + \text{De} \left( u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} - \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xx} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.81)$$

$$\tau_{yy} + \text{De} \left( u \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \tau_{yy} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xy} \right) = 2 \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.82)$$

No presente trabalho as tensões  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yx}$  foram consideradas iguais, uma vez desprezadas as forças de campo, salvo a aproximação de Boussinesq [AND84].

No capítulo seguinte descreve-se a aproximação usada para essas equações governantes (2.76) - (2.82), a geração da malha computacional, os métodos de solução, a estabilidade e a convergência destes métodos.

## 3. PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

Os modelos de equações diferenciais parciais (EDP) apresentam derivadas espaciais e temporais às quais podem ser aproximadas produzindo um sistema de equações algébricas. Neste capítulo o conceito de aproximação por diferenças é enfatizado. Ambas as derivadas, em relação ao tempo e ao espaço, podem ser aproximadas por outras técnicas, como por exemplo volumes finitos [JAM81, PAT81] e elementos finitos [ZIE89]; entretanto, não exploradas aqui por fugir do objetivo deste trabalho. Além disso, descreve-se as malhas, o sistema coordenado generalizado e os métodos iterativos de Runge-Kutta e de Relaxações Sucessivas utilizados, bem como discute-se o critério de convergência e de estabilidade dos métodos numéricos.

### 3.1 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

A aproximação em diferenças finitas é usada com frequência no meio científico em fluidos afim de dominar as não-linearidades de modelos matemáticos adotados e no acoplamento das equações resolvidas segregadamente. O mesmo tem-se demonstrado eficiente no decorrer dos tempos. Prova disto é sua aplicação por Schneider e Zedan [SCH81], os quais avaliam a técnica *Modified Strongly Implicit Procedure* (MSI) baseado nesta aproximação e em misturas e separações de fluidos apresentado por Crochet [CRO84] e ainda a importância dada por Anderson [AND84], Smith [SMI85], Kincaid e Cheney [KIN94], e Lomax [LOM99], para fluidos não-Newtonianos descrito por Vradis e Hammand [VRA98]. Antes de proceder a aproximação das equações define-se algumas notações.

#### 3.1.1 Notações

Uma malha simples envolvendo tanto o tempo quanto o espaço é mostrada na Fig. 3.1. A análise desta figura permite definir termos e notações necessárias para descrever a aproximação em diferenças finitas. Geralmente as variáveis dependentes, “u”, por exemplo, são funções das

variáveis independentes tempo  $t$  e as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Aqui, por simplicidade, considera-se o caso unidimensional (1D),  $u = u(x, t)$ , onde somente uma variável é denotada. O índice assumido para  $x$  é “ $i$ ”, e para  $t$  é “ $k$ ”. Então, as distâncias da malha são:

$$x = x_i = i \cdot \Delta x, \quad (3.1a)$$

$$t = t_k = k \cdot \Delta t, \quad (3.1b)$$

onde  $\Delta x$  é o espaçamento em  $x$  e  $\Delta t$  é o passo de tempo, como mostra a Fig. 3.1.

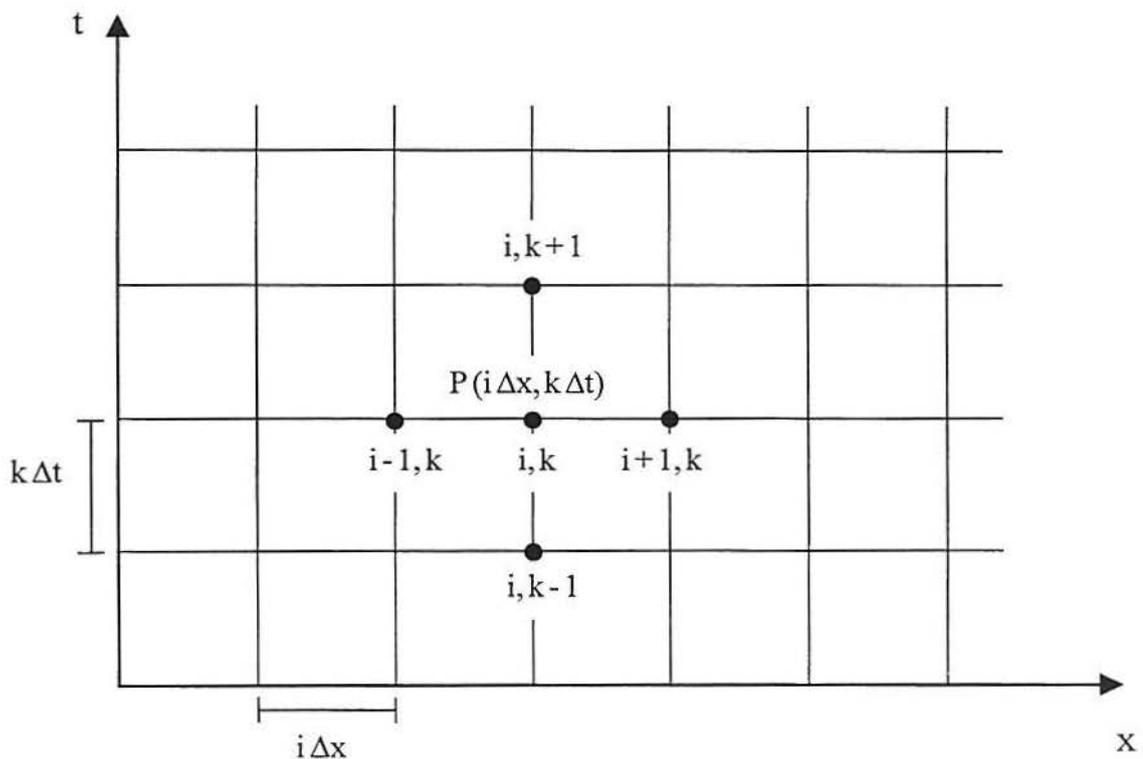


Fig. 3.1 – Ilustração do arranjo espaços e tempo [LOM95].

### 3.1.2 Aproximação das Derivadas

A aproximação de uma derivada em diferenças pode ser gerada por meio de expansão em séries de Taylor [SMI85]. Considerando  $u(x, t)$  com “ $t$ ” fixo e seguindo a notação convencional (3.1), pode-se expressar a velocidade  $u_{i+1}$  no ponto  $(i+1)$  em função da velocidade  $u_i$ , no ponto  $(i)$ , pela série de Taylor,

$$u_{i+1} = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \frac{\Delta x^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_i \frac{\Delta x^n}{n!}. \quad (3.2)$$

Subtraindo  $u_i$  e dividindo por  $\Delta x$  obtém-se

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \frac{\Delta x}{2!} + \dots \quad (3.3)$$

A expressão (3.3) é matematicamente exata se [WEN96]:

- a) o número de termos é infinito e a série converge;
- b) e/ou  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Considerar computacionalmente um número infinito de termos é impraticável. Assim, a expansão  $(u_{i+1} - u_i)/\Delta x$  é uma aproximação razoável para  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$  se a expressão (3.2) for “truncada” e se  $\Delta x$  é tão pequeno quanto o comprimento de escala. Assim, admitindo um erro de truncamento de ordem 2 [ $O(\Delta x^2)$ ], obtém-se uma aproximação de “1ª ordem” para a derivada primeira

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \cong \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}. \quad (3.4)$$

Agora considerando a aproximação espacial  $(u_{i+1} - u_{i-1})/(2\Delta x)$ , expandindo  $u_{i+1}$  em função de  $u_{i-1}$  e reagrupando os termos, o resultado é a expressão,

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i-1} \frac{\Delta x^2}{3!} + \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_{i-1} \frac{\Delta x^4}{5!} + \dots \quad (3.5)$$

Ao truncar a série dada pela expressão acima, obtém-se a seguinte aproximação pelo esquema de diferenças centrais para a derivada primeira

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1} \cong \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (3.6)$$

Para a derivada de segunda ordem escreve-se as séries,

$$u_{i-1} = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots + \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_i \frac{\Delta x^n}{n!} + \dots, \quad -\Delta x \leq x \leq 0, \quad (3.7)$$

$$u_{i+1} = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots + \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_i \frac{\Delta x^n}{n!} + \dots, \quad 0 \leq x \leq \Delta x. \quad (3.8)$$

Adicionando essas duas expressões (3.7 e 3.8) e reagrupando os termos resulta

$$\frac{u_{i-1} - u_{i+1}}{\Delta x^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \dots + 2\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_i \frac{\Delta x^n}{n!} + \dots \quad (3.9)$$

que quando truncada a aproximação pelo esquema central para as derivadas de segunda ordem é dada por

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \cong \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2}. \quad (3.10)$$

De forma análoga, na dedução da expressão (3.4) a aproximação de 1ª ordem para a derivada temporal  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$  é

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t}. \quad (3.11)$$

Em se tratando de aproximações por diferenças entre as distâncias dos pontos discretos, faz-se necessário gerar uma malha computacional (conjunto de pontos discretos). E por possibilitar o uso de domínios quaisquer utiliza-se o sistema de coordenadas generalizadas. Estes assuntos serão discutidos no capítulos seguintes.

### 3.2 MALHA COMPUTACIONAL E COORDENADAS GENERALIZADAS

Considera-se, neste trabalho, escoamentos de fluidos entre placas paralelas e cilindros, este último com e sem excentricidade. Neste item ilustra-se as malhas computacionais utilizadas, bem como se justifica o uso de coordenadas generalizadas.

### 3.2.1 Malha Computacional

Considera-se o escoamento de fluidos em duas situações entre superfícies móveis: a primeira admite o movimento circular dum cilindro (corte transversal) de raio  $R_i$  em relação a outro cilindro estático (velocidade nula) de raio  $R_o$ ; admite-se também uma distância entre os centros dos cilindros (excentricidade). A segunda situação admitida é o escoamento de Couette, para o caso em que uma placa superior desliza à velocidade constante  $U$  em relação à placa inferior estática. As figuras abaixo ilustram os planos físicos considerados no sistema coordenado  $xy$ .

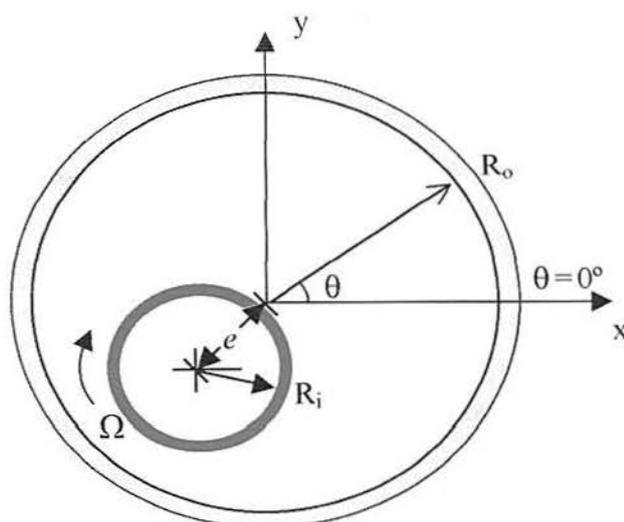


Fig. 3.2 – Ilustração do plano físico para cilindros rotatórios.

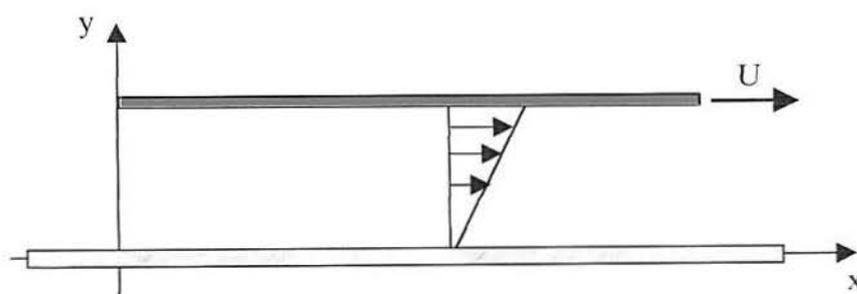


Fig. 3.3 – Ilustração do plano físico para placas paralelas.

A geração das malhas computacionais estruturadas (veja Fig. 3.4) é de forma algébrica, com a possibilidade de refinamento próximo às paredes pelo uso duma progressão geométrica. O refino na vizinhança das paredes faz-se necessário a fim de captar as variações das propriedades físicas (velocidades, pressão e temperatura) nestas regiões e, no caso dos cilindros, melhorar a taxa de variação entre as células devido a possíveis instabilidades numéricas. Aconselha-se

utilizar uma relação de tamanho entre as células  $\Delta x \times \Delta y \cong 1 \times 1$ , com tolerância de  $\pm 20\%$  [DeB00].

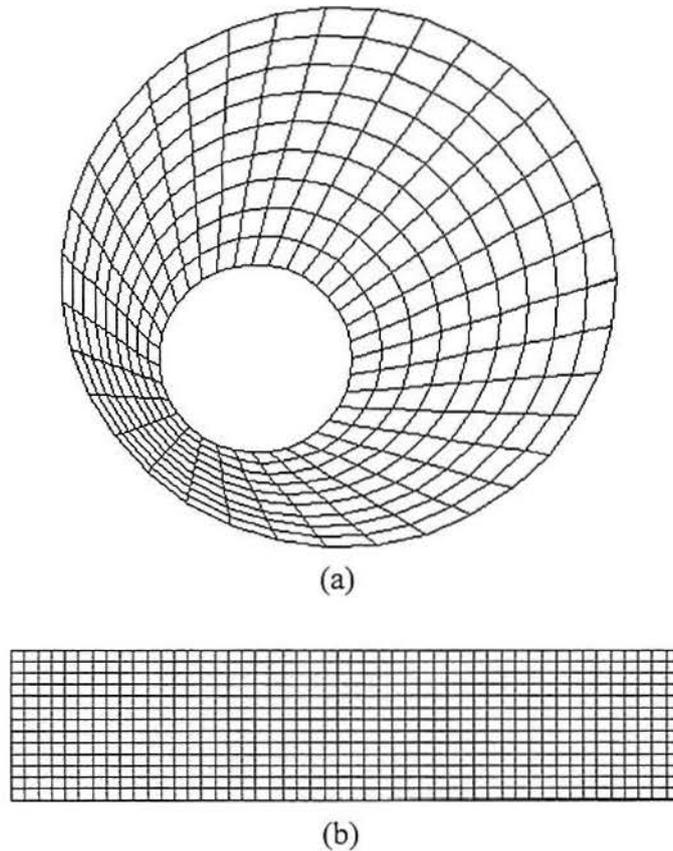


Fig. 3.4 – Malhas computacionais para (a) cilindros rotatórios e (b) planos paralelos.

O arranjo para a disposição das variáveis da malha é o co-localizado, pois permite economia de memória e de tempo computacional, ou seja, o cálculo das métricas da transformação de coordenadas é feito uma única vez.

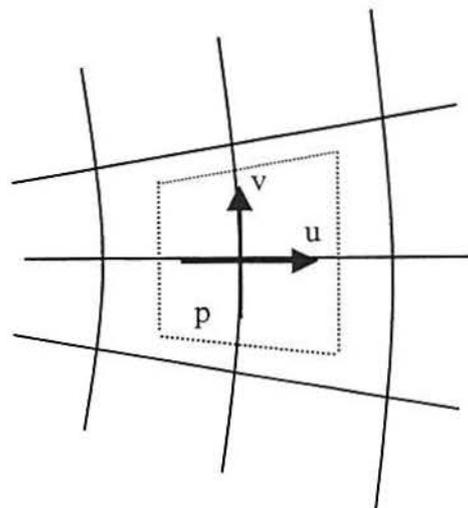


Fig. 3.5 – Arranjo co-localizado.

Como mencionado, utiliza-se domínios quaisquer (variando a excentricidade ou refinando em determinadas regiões); assim têm-se situações diferentes. Logo, nada mais oportuno que considerar o sistema de coordenadas generalizadas.

### 3.2.2 Coordenadas Generalizadas

A discretização de geometrias variadas leva a considerar malhas computacionais distintas; logo faz-se necessário a aproximação das equações diferenciais parciais dos modelos matemáticos considerados em coordenadas generalizadas. Toma-se a seguinte relação entre as áreas ( $\Delta x \Delta y \Leftrightarrow \Delta \xi \Delta \eta$ ) dos planos físico e transformado

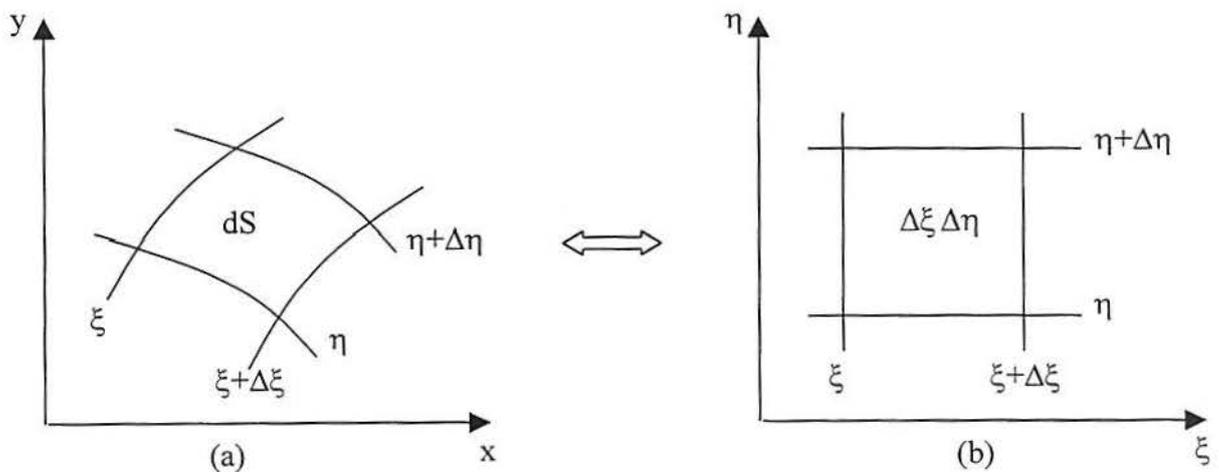


Fig. 3.6 – Áreas nos planos (a) físico e (b) transformado [MAL95].

Apresenta-se aqui, de forma resumida, as relações entre as métricas da transformação do plano físico. No “Apêndice A” apresenta-se as deduções para obtenção dessas relações.

- Jacobiano da transformação (relação entre áreas em cada um dos espaços bidimensionais),

$$J = \frac{1}{x_{\xi} y_{\eta} - y_{\xi} x_{\eta}} = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y; \quad (3.12)$$

- Relação entre as métricas,

$$\begin{aligned}\xi_x &= Jy_\eta, & \xi_y &= -Jx_\eta, \\ \eta_x &= -Jy_\xi, & \eta_y &= Jx_\xi;\end{aligned}\tag{3.13}$$

- Relação entre as derivadas de segunda ordem,

$$\begin{aligned}\xi_{xx} &= -J\left[(x_{\xi\xi}\xi_x^2 + x_{\eta\eta}\eta_x^2 + 2x_{\xi\eta}\xi_x\eta_x)y_\eta - (y_{\xi\xi}\xi_x^2 + y_{\eta\eta}\eta_x^2 + 2y_{\xi\eta}\xi_x\eta_x)x_\eta\right], \\ \xi_{yy} &= -J\left[(x_{\xi\xi}\xi_y^2 + x_{\eta\eta}\eta_y^2 + 2x_{\xi\eta}\xi_y\eta_y)y_\eta - (y_{\xi\xi}\xi_y^2 + y_{\eta\eta}\eta_y^2 + 2y_{\xi\eta}\xi_y\eta_y)x_\eta\right],\end{aligned}\tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\eta_{xx} &= -J\left[(y_{\xi\xi}\xi_x^2 + y_{\eta\eta}\eta_x^2 + 2y_{\xi\eta}\xi_x\eta_x)x_\xi - (x_{\xi\xi}\xi_x^2 + x_{\eta\eta}\eta_x^2 + 2x_{\xi\eta}\xi_x\eta_x)y_\xi\right], \\ \eta_{yy} &= -J\left[(y_{\xi\xi}\xi_y^2 + y_{\eta\eta}\eta_y^2 + 2y_{\xi\eta}\xi_y\eta_y)x_\xi - (x_{\xi\xi}\xi_y^2 + x_{\eta\eta}\eta_y^2 + 2x_{\xi\eta}\xi_y\eta_y)y_\xi\right].\end{aligned}\tag{3.15}$$

Utiliza-se estas relações para transformar

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y, t), \\ \eta &= \eta(x, y, t), \\ \chi &= \chi(t).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Mas, como  $\chi$  é somente uma função de  $t$ , considera-se  $\chi = t$  [WEN96], e apenas a transformação das equações nas variáveis  $x$  e  $y$  são avaliadas (analisadas). As derivadas parciais presentes nos modelos considerados, apresentados aqui na forma genérica para uma função  $\psi$ , podem ser expressas pela regra da cadeia.

Para as derivadas de 1ª ordem resulta:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\xi_x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\eta_x;\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right), \\ &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\xi_y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\eta_y.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Para as derivadas de 2ª ordem fica-se com:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right) \xi_x + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) \eta_x \right] \\
 &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right) \xi_{xx} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\right) \xi_x^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) \eta_{xx} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\right) \eta_x^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}\right) \eta_x \xi_x; \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right) \xi_y + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) \eta_y \right] \\
 &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right) \xi_{yy} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\right) \xi_y^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) \eta_y + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\right) \eta_y^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}\right) \eta_y \xi_y. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Para as derivadas cruzadas obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \\
 &= \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\
 &= \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \xi_x \xi_y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \eta_x \eta_y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} [\eta_x \xi_y + \xi_x \eta_y]. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Segundo Wendt [WEN96], se as expressões analíticas são dadas na forma fechada as métricas também podem ser obtidas nesta forma. Mas, para a transformação em questão teremos

uma relação numérica, avaliada por diferenças finitas centrais. A equação CQM<sub>x</sub> na forma adimensionalizada, em coordenadas generalizadas fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial(uu)}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial(vu)}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial(vu)}{\partial \eta} \eta_y = & - \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta_x \right] + \\ & \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \eta} \eta_y \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Usando a aproximação em diferenças finitas para as derivadas da Eq. (3.22), tem-se como exemplo a expressão,

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^0}{\Delta t} + \left( \frac{u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2}{2\Delta \xi} \right) \xi_{x,i,j} + \left( \frac{u_{i,j+1}^2 - u_{i,j-1}^2}{2\Delta \eta} \right) \eta_{x,i,j} + \left( \frac{v_{i+1,j} u_{i+1,j} - v_{i-1,j} u_{i-1,j}}{2\Delta \xi} \right) \xi_{x,i,j} + \\ \left( \frac{v_{i,j+1} u_{i,j+1} - v_{i,j-1} u_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \right) \eta_{y,i,j} = \left( \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta \xi} \right) \xi_{x,i,j} + \left( \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \right) \eta_{x,i,j} - \\ \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{\tau_{xx,i+1,j} - \tau_{xx,i-1,j}}{2\Delta \xi} \right) \xi_{x,i,j} + \left( \frac{\tau_{xx,i,j+1} - \tau_{xx,i,j-1}}{2\Delta \eta} \right) \eta_{x,i,j} + \right. \\ \left. \left( \frac{\tau_{xy,i+1,j} - \tau_{xy,i-1,j}}{2\Delta \xi} \right) \xi_{y,i,j} + \left( \frac{\tau_{xy,i,j+1} - \tau_{xy,i,j-1}}{2\Delta \eta} \right) \eta_{y,i,j} \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nas próximas seções discute-se os métodos de solução adotados e suas implicações quanto à estabilidade e convergência.

### 3.3 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Os métodos diretos, tais como fatoração QR, eliminação Gaussiana entre outros, para resolver um sistema ( $Ax=b$ ) requerem um número finito, porém muito grande, de operações para produzir uma solução exata. A menos de arredondamento tornam-se proibitivos, em termos de tempo computacional e armazenamento, se a matriz dos coeficientes  $A$  é muito grande. Para tais problemas é pertinente e aconselhável usar métodos iterativos, como o de Runge-Kutta, Newton, Relaxações Sucessivas [GRE70, TAV99].

Um método iterativo produz a solução, quando converge, como o limite de uma seqüência, pelo que precisará truncar o processo num ponto conveniente e adotar como solução uma aproximação desse limite. Aqui teremos duas fontes de erro: o arredondamento e o truncamento [KIN94]. Os modelos iterativos adotados na forma explícita são:

- Relaxações Sucessivas, para o cálculo da pressão;
- Runge-Kutta, para o cálculo das velocidades nas direções x e y e da temperatura T.

### 3.3.1 Método das Relaxações Sucessivas

O método das relaxações sucessivas procura acelerar o processo de convergência do procedimento iterativo de Gauss-Seidel com a introdução dum parâmetro de relaxação " $\omega$ ", que modifica (diminui/aumenta) o raio espectral (maior autovalor) [KIN94] da matriz Jacobiana de iteração,

$$\Psi^{k+1} = \omega \Psi^{k+1} + (1 - \omega) \Psi^k .$$

O valor de  $\omega$  varia entre 0 e 2, sendo classificado como um processo de:

- Sobrelaxação para  $1 < \omega < 2$  indicado para problemas parabólicos e hiperbólicos,
- Subrelaxação para  $0 < \omega < 1$ , indicado para problemas elípticos e oscilatórios.

O valor adotado no presente trabalho foi  $\omega = 0,8$ .

### 3.3.2 Método de Runge-Kutta

O método explícito de Runge-Kutta é usado pela sua facilidade de implementação; o uso de coeficientes possibilita obter soluções com precisão temporal, atingindo as características apropriadas de amortecimento do erro. Isto é, os erros de truncamento local, que surgem em cada passo devido ao método numérico não poder considerar todos os termos da série de Taylor, se comportam como erro de truncamento local de  $O(\Delta x^2)$  para o caso de Runge-Kutta de 3ª ordem [KIN94]. Este utiliza,

$$\bar{W}_{ij}^{(1)} = \bar{W}_{ij}^{(0)} - \alpha^{(1)} \Delta t \bar{R}_{ij}^{(0)} ,$$

$$\bar{W}_{ij}^{(2)} = \bar{W}_{ij}^{(0)} - \alpha^{(2)} \Delta t \bar{R}_{ij}^{(1)} ,$$

$$\bar{W}_{ij}^{(3)} = \bar{W}_{ij}^{(0)} - \alpha^{(3)} \Delta t \bar{R}_{ij}^{(2)} ,$$

onde  $\bar{R}_{ij} = \bar{Q}_{ij} - \bar{D}_{ij}$ , sendo  $\bar{Q}_{ij}$  os termos convectivos,  $\bar{D}_{ij}$  os termos dissipativos e  $\Delta t$  o espaçamento temporal, com  $\alpha^{(1)} = 1/2$ ;  $\alpha^{(2)} = 1/2$ ;  $\alpha^{(3)} = 1$ , para aproximação de segunda ordem temporal. Pode-se dizer que o método das Relaxações Sussesivas aplicado ao método de Gauss-Seidel corresponde a um estágio do Método de Runge-Kutta, possuindo as mesmas caracterísitcas de convergência [DeB00].

### 3.3.3 Critério de Convergência

Como a solução exata quase nunca é atingida num processo iterativo, necessita-se ter algum critério para terminar o processo, adotando como solução aproximada o último termo da seqüência calculado. Quando há convergência  $x^{(k+1)}$  é uma aproximação melhor da solução  $x$  que  $x^{(k)}$ . Então, um critério de convergência é parar as iterações se,

$$\left| \frac{\sum_{i,j} W_{i,j}^k - \sum_{i,j} W_{i,j}^{k+1}}{W_0} \right| < \delta, \quad (3.24)$$

para  $\delta > 0$  pré-estabelecido, chamado de tolerância e escolhido de acordo com a exatidão desejada, conforme o caso (fenômeno físico) considerado. Se o processo converge, o numerador em (3.24) vai a zero. O critério de parada para simulação de fluidos não-Newtonianos considerado foi o erro global para a pressão “p” e para simulação da convecção natural e mista foi considerado o erro global da temperatura “T”, pois neste último caso a variação da pressão é muito pequena.

É muitas vezes difícil aceitar um resultado como uma boa aproximação de  $x^{(k)}$ . Existem condições que garantem a convergência, independente da escolha da aproximação inicial. Deduz-se aqui, com base em teoremas pré-estabelecidos na literatura, tais condições:

Seja  $x$  a solução do sistema de equações. Então, de  $x = Bx + c$  e  $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$  vem, para todo  $k$ ,

$$x - x^{(k+1)} = B(x - x^{(k)}), \quad (3.25)$$

e também

$$x - x^{(k)} = B(x - x^{(k-1)}). \quad (3.26)$$

Substituindo  $x - x^{(k)}$ , dado por (3.26), em (3.25) resulta

$$x - x^{(k+1)} = B^2(x - x^{(k-1)}). \quad (3.27)$$

Continuando esse processo  $k$  vezes, chega-se a

$$x - x^{(k+1)} = B^k(x - x^{(1)}). \quad (3.28)$$

Essa última igualdade, válida para todo  $k$ , mostra que  $x^{(k)} \rightarrow x$  se:

**Teorema 3.1** –  $B^{(k)} \rightarrow 0$  com  $k \rightarrow \infty$  se e somente se [YOU71],

$$S(B) < 1; \quad (3.29)$$

**Teorema 3.2** – Para qualquer norma matricial  $\|\cdot\|_\beta$  tem-se [YOU71],

$$S(B) \leq \|B\|_\beta. \quad (3.30)$$

Se  $S(B) \leq 1$ , então  $S(B^k) \leq 1$  para todo  $k$ , e admitindo o teorema 3.2,  $\|B^k\|_\beta \geq S(B^k) \geq 1$  para toda norma  $\|\cdot\|_\beta$ . Por outro lado, se  $B^{(k)} \rightarrow 0$  então  $\|B^k\|_\beta \rightarrow 0$  o que é impossível se  $S(B^k) \geq 1$ . Logo (3.30) é uma condição necessária para convergência [BUT87].

Se  $S(B) < 1$ , então existe uma matriz não singular “L” tal que  $\|B\|_L < 1$ . Já que  $\|B^k\|_L \leq \|B\|_L^k$  segue que  $\|B^k\|_L \rightarrow 0$ , logo é evidente que  $B^k \rightarrow 0$ .

### 3.3.4 Estabilidade

A solução numérica de EDP está sujeita a dois tipos de erros. Um devido à aproximação na discretização espacial e outro relacionado ao arredondamento e truncamento devido ao emprego de um computador de precisão finita [SAN98, LOM99]. Se esses erros não são

controlados o método numérico pode se tornar instável não conduzindo a uma solução fisicamente consistente. Entretanto, pode-se analisar os métodos numéricos e estabelecer condições de estabilidade utilizando aproximações da solução. Mas, a análise de estabilidade restringe-se, geralmente, a problemas simplificados os quais servem como uma indicação a problemas mais complexos.

Considere a equação do calor unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.31)$$

Aproxima-se a solução por uma Série de Fourier da forma [AND84]

$$u_k^n = U^n e^{ik\theta}, \quad (3.32)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$ ,  $U^n$  é a amplitude no instante  $n$ ,  $\theta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$  é o ângulo de fase sendo  $\lambda$  o comprimento de onda. Aproximando a equação modelo por diferenças finitas centrais tem-se,

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (3.33)$$

Definindo o número de difusão  $d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$  fica-se com

$$u_k^{n+1} = u_k^n + d(u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n). \quad (3.34)$$

Substituindo a expressão em séries de Fourier resulta

$$U^{n+1} e^{ik\theta} = U^n e^{ik\theta} + d(U^n e^{i(k+1)\theta} - 2U^n e^{ik\theta} + U^n e^{i(k-1)\theta}). \quad (3.35)$$

Cancelando o fator comum obtém-se

$$U^{n+1} = U^n [1 + d(e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta})] = U^n [1 + 2d(\cos \theta - 1)]. \quad (3.36)$$

Introduzindo um fator de ampliação  $G = \frac{U^{n+1}}{U^n}$  tem-se,

$$G = 1 + 2d(\cos \theta - 1). \quad (3.37)$$

Para que o método seja estável é necessário que a solução permaneça ilimitada. Logo, o fator de amplificação deve ser tal que  $|G| \leq 1$ , o que resulta em:

$$d \leq \frac{1}{2}, \quad (3.38)$$

ou seja, a relação entre a discretização espacial e temporal deve ser tal que:

$$\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.39)$$

Esse tipo de análise, chamada análise de estabilidade de Von Neumann ou de Fourier [AND84], permite analisar os métodos numéricos e predizer limites práticos para a discretização, levando em conta o valor do coeficiente de difusão  $\alpha$ . No caso onde a parte imaginária é não-nula pode-se realizar uma análise gráfica. A figura que descreve o fator de amplificação deve permanecer no interior dum círculo de raio unitário.

Analisando a estabilidade de um método explícito para a equação da onda, por outro lado,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}, \quad (3.40)$$

a equação discretizada tem a forma,

$$u_k^{n+1} = 2u_k^n - u_k^{n-1} + c^2(u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n), \quad (3.41)$$

onde  $c = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$  é o chamado número de Courant. A condição de estabilidade, segundo análise de Von Neumann, é

$$c^2 \leq 1, \quad (3.42)$$

ou seja, a velocidade da onda “a” deve ser inferior à escala de velocidade computacional  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ .

Considerando agora um problema unidimensional de difusão e convecção tem-se,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.43)$$

A análise de Von Neumann resulta em um par de condições de estabilidade; a primeira é o limite do número de difusão:  $d \leq 1/2$ . A segunda é dada por:

$$Pe_c = -a \frac{\Delta x}{\alpha} \leq \frac{2}{c}. \quad (3.44)$$

A expressão  $Pe_c = -a \frac{\Delta x}{\alpha}$  é denominada número de Peclet da célula, ou seja, um número que relaciona a convecção e a difusão.

### 3.3.5 Algoritmo Computacional

O código (*software*) computacional foi desenvolvido no ambiente de trabalho UNIX/LINUX utilizando programação *Formula Translator* (FORTRAN 90), por ser uma linguagem de programação amplamente utilizada para aplicações científicas e de engenharia. Esta última versão permite, além de outras vantagens:

- Operações com vetores e matrizes de maneira simples, além da possibilidade de índices negativos para os *arrays*;
- A utilização de módulos contendo um número qualquer de subrotinas;
- Alocação dinâmica de memória, incluindo matrizes dinâmicas;
- Subrotinas e funções recursivas;
- Formato livre de programação, isto é, não existe mais a necessidade de colocar o código a partir da sétima coluna, por exemplo.

No que se refere aos recursos computacionais, a pesquisa foi desenvolvida junto ao Laboratório Integrado de Computação Científica - LICC, do Instituto de Matemática e ao Centro Nacional de Supercomputação da Região Sul do Brasil - CESUP/RS, ambos instalados na Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS.

O referido código computacional, desenvolvido com base no algoritmo representado na figura Fig. 3.7, inicia o processo fazendo uma leitura (atribuição) dos parâmetros, sendo que a

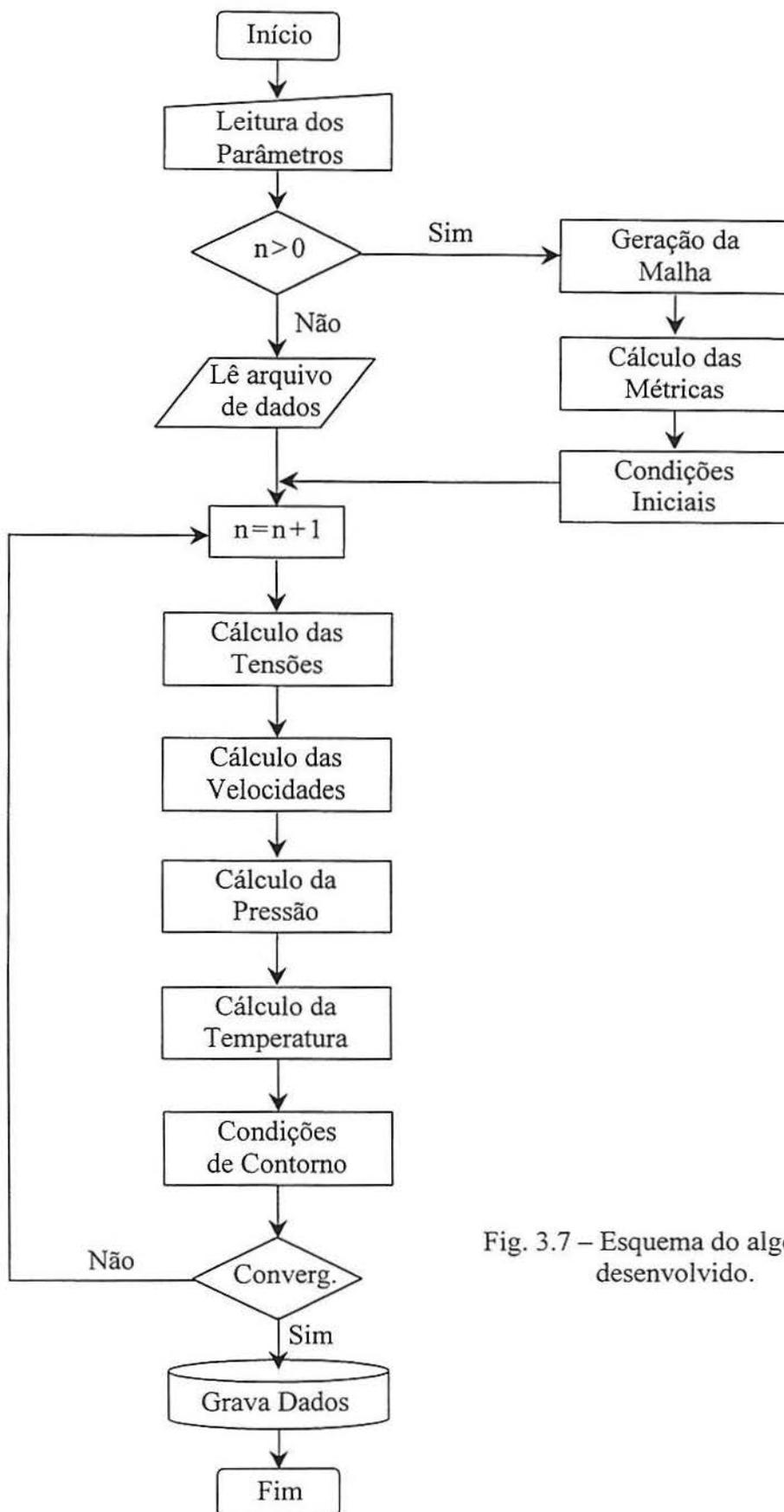


Fig. 3.7 – Esquema do algoritmo desenvolvido.

alocação de memória das matrizes e feita dinamicamente no decorrer do processo. Num segundo momento avalia-se (seleciona-se) o caso estabelecido:

- Faz-se a leitura de dados calculados previamente até a  $n$ -ésima iteração.
- Ou, se deve primeiro gerar a malha calculando os pontos  $x_{i,j}$  e  $y_{i,j}$ ; em seguida transforma-se esses pontos gerados em  $\xi_{i,j}$  e  $\eta_{i,j}$ , ou seja, a transformação de coordenadas ortogonais cartesianas para coordenadas generalizadas (descrito no item 3.2.2) e terceiro considera-se as condições iniciais e de contorno para  $u_{i,j}$ ,  $v_{i,j}$ ,  $p_{i,j}$  e  $T_{i,j}$ , em cada ponto.

Segue, então, o cálculo iterativo a partir da  $n$ -ésima iteração ou primeira iteração na seguinte ordem, calculando em cada ponto:

- As tensões, considerando neste estágio fluido Newtoniano ( $De=0$ ) ou não-Newtoniano ( $De>0$ ).
- As componentes do vetor velocidade ( $u_{i,j}$  e  $v_{i,j}$ ).
- A pressão ( $p_{i,j}$ ).
- E a temperatura ( $T_{i,j}$ ).

Calculadas as propriedades físicas deve-se considerar as condições de contorno. Num estágio seguinte avalia-se a convergência conforme descrito na subseção 3.3.1; se convergiu grava-se os dados desejados e finaliza-se o processo, ou, se não convergiu, retorna-se ao cálculo iterativo para as componentes da tensão e velocidade, pressão e temperatura até que o critério de parada seja satisfeito ou a convergência desejada seja obtida.

## 4. RESULTADOS

No presente capítulo resultados bidimensionais, obtidos via simulação do escoamento incompressível de fluidos Newtonianos na maioria [PED00a] e alguns não-Newtonianos entre placas e cilindros, são apresentados. A fim de calibração do código (*software*) computacional desenvolvido compara-se perfis de velocidade e temperatura (isotermas) com soluções analíticas, dados experimentais e resultados de simulação numéricas consistentes disponíveis na literatura. As comparações apresentadas podem ser ilustradas na tabela abaixo.

Tab. 4.1 – Resumo (síntese) das comparações entre resultados.

ESCOAMENTO	FLUIDO	SITUAÇÃO	COMPARAÇÃO
Placas Paralelas (Couette)	Newtoniano	Difusividade segundo a variação do produto $Pr Ec$	Solução analítica dada por Schlichting [SCH68]
		Perfil de velocidade segundo um gradiente de pressão adimensional	Solução analítica dada por Schlichting [SCH68]
Cilindros	Newtoniano	Distribuição de temperatura para cilindros concêntricos com $\Omega=1$	Dados experimentais de Hawarth [HAW64]
		Isotermas e linhas de corrente segundo convecção natural para cilindros com excentricidade, com $\Omega=0$	Simulação numérica de Ming-I et al. [MIN98]
	Linhas de corrente e isotermas segundo convecção mista para cilindros concêntricos, com $\Omega=-1$	Simulação numérica de Ming-I et al. [MIN98]	
	não-Newtoniano	Isotermas para cilindros com excentricidade	Simulação numérica de Li e Davies [LI94]

## 4.1 PLACAS PARALELAS

Inicia-se com a análise do escoamento entre placas paralelas a fim de calibrar o código computacional desenvolvido, comparando as soluções obtidas numericamente com os resultados analíticos dados por Schlichting [SCH68]. Este caso foi escolhido pela sua simplicidade geométrica (Fig. 4.1) e por apresentar hipóteses simplificadoras implícitas (coerrentes) do fenômeno. Ou seja, é possível imaginar que exista um gradiente de pressão entre as extremidades das placas (saída e entrada) o qual possa provocar mudanças no sentido do escoamento.

Schlichting define o seguinte sistema de equações para a distribuição de velocidades e temperatura num escoamento de fluido Newtoniano incompressível bidimensional desenvolvido com propriedades constantes entre placas paralelas.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (4.2)$$

$$\rho \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right], \quad (4.3)$$

$$\rho C_p \left[ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \kappa \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] + \mu \phi, \quad (4.4)$$

onde

$$\phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

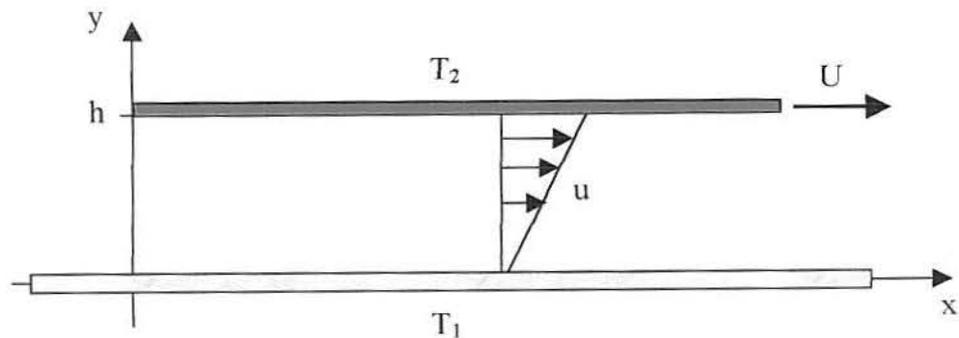


Fig. 4.1 – Esquema do plano físico para o escoamento entre placas paralelas.

A solução analítica para o escoamento de Couette, ou seja, para o caso em que a placa superior desliza à velocidade constante  $U$  em relação à placa inferior estática (velocidade nula), separadas por uma distância  $h$ , conforme mostra a Fig. 4.1, para as condições de contorno

$$y=0 \Rightarrow u=0, \quad y=h \Rightarrow u=U, \quad (4.5)$$

é dada por

$$u = \frac{y}{h}U + P \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right), \quad (4.6)$$

onde  $P$  é o gradiente de pressão adimensional definido conforme

$$P = -\frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx}. \quad (4.7)$$

Se for desconsiderado o gradiente de pressão obtém-se o caso particular conhecido como escoamento de Couette simples, ou escoamento cisalhante simples (fluido Newtoniano),

$$u = \frac{y}{h}U. \quad (4.8)$$

A malha computacional utilizada foi de  $20 \times 200$  pontos como ilustrado pela Fig. 4.2, sem refinamento próximo às paredes em relação ao restante do domínio. Usa-se uma malha uniformemente refinada (espaçamentos uniformes) para que as variações da velocidade sejam igualmente captadas.

Comparando os perfis de velocidade para  $Pr \times Ec = 8$ , conforme ilustra a Fig 4.3, percebe-se boa aproximação entre estas soluções. Os dados usados para simulação são dum fluido Newtoniano ( $De = 0$ ) com  $Pr Ec = 1$  são:  $Re = 300$ ,  $T_1 = 5$ ,  $T_2 = 3$ ,  $U = 1$ ,  $Ra = 0$ , e dimensão  $1,0 \times 0,112$  [PED00b].

Analisando o escoamento segundo o gradiente de pressão adimensional tem-se que para  $P > 0$  a pressão decresce na direção do movimento e a velocidade é positiva ao longo do canal. Para valores negativos de  $P$  a velocidade torna-se negativa, ou seja, tem-se fluxo reverso conforme mostrado na Fig. 4.4 dada por Schlichting [SCH68].

Os perfis de velocidade, segundo vários gradientes de pressão adimensionais  $P$ , obtidos numericamente é mostrado na Fig. 4.5.

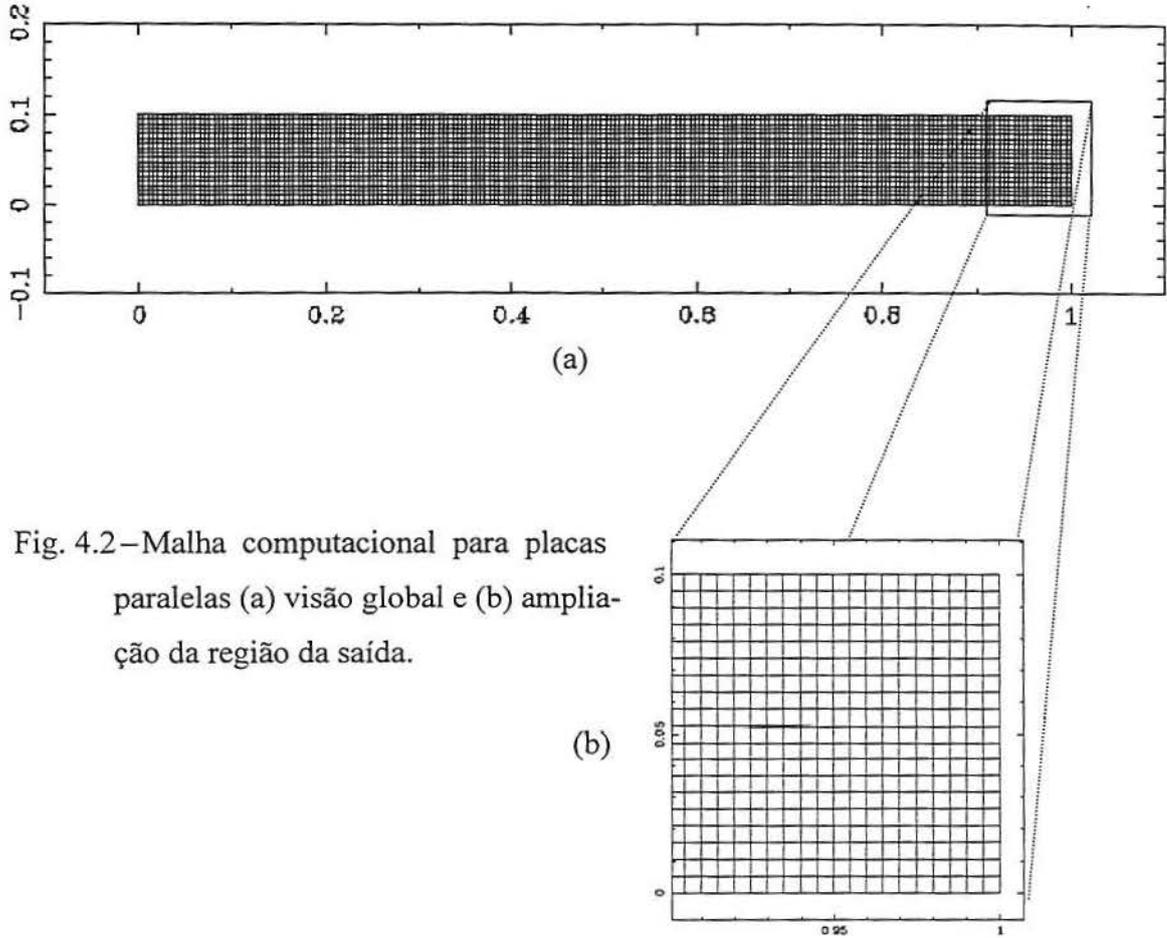


Fig. 4.2—Malha computacional para placas paralelas (a) visão global e (b) ampliação da região da saída.

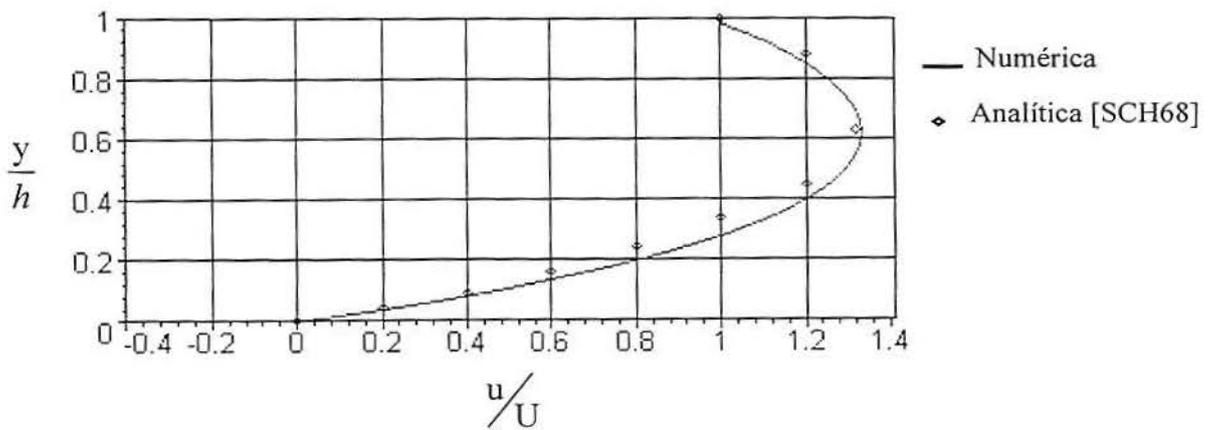


Fig. 4.3 – Comparação do perfil de velocidade da solução analítica de Schlichting e o escoamento de Couette (placas paralelas) com  $P=0,8$ .

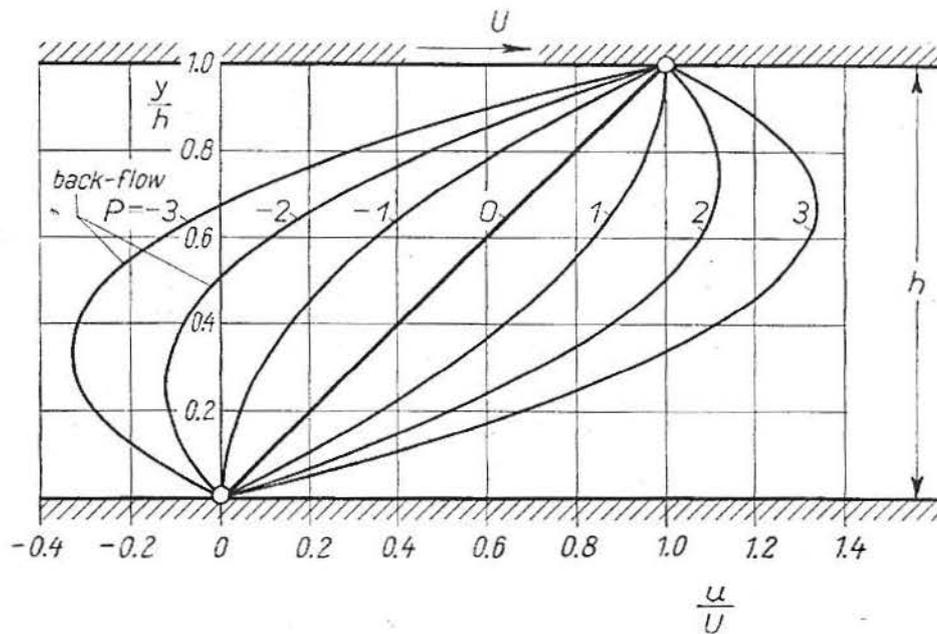


Fig. 4.4–Escoamento de Couette entre placas paralelas [SCH68]:  
 $P > 0$ , pressão decresce na direção do movimento da parede;  
 $P < 0$ , pressão cresce na direção do movimento da parede;  
 $P = 0$ , gradiente de pressão nulo.

Constata-se a interferência do gradiente de pressão previsto por Schlichting, havendo um fluxo reverso quando  $P < 0$ . Observa-se, também, explicitamente, a influência da placa móvel produzindo velocidade maior para diferentes valores de  $P$ . As mesmas curvas apresentadas na Fig. 4.4 são citadas por Burmeister [BUR93] o qual obteve a mesma solução analítica (4.7) de Schlichting [SCH68].

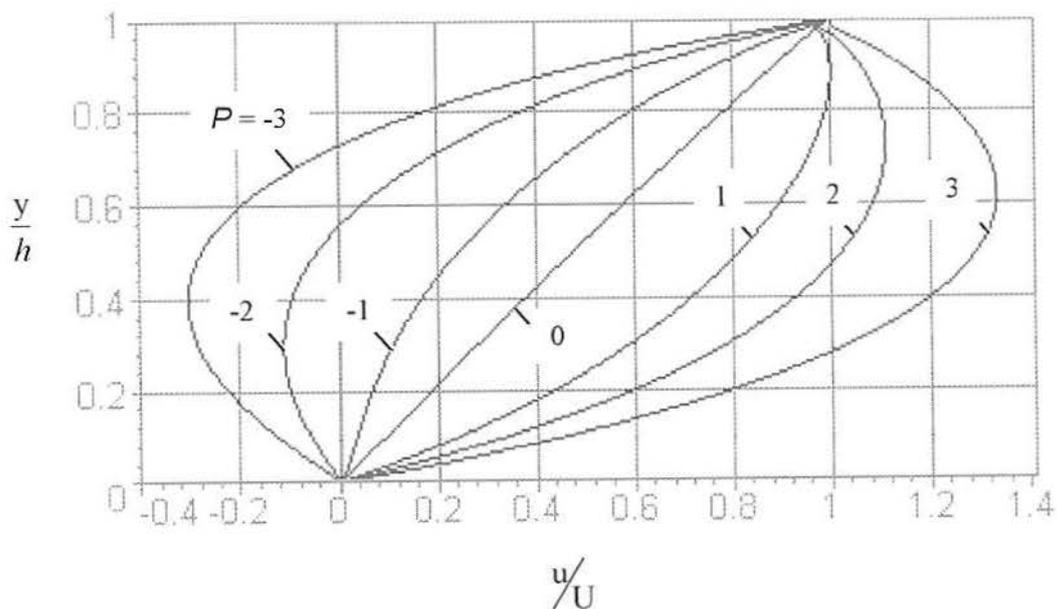


Fig. 4.5 – Soluções para o escoamento de Couette (placas paralelas) com variação do gradiente adimensional de pressão: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Uma equação diferencial ordinária (EDO) é obtida ao considerar que  $v \equiv 0$ ,  $P = 0$  e admitindo que a solução é independente de  $x$ ; via expressão (4.4) obtém-se para a temperatura,

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (4.9)$$

Considera-se que a temperatura é constante ao longo das paredes inferior e superior, resultando.

$$y=0 \Rightarrow T=T_0, \quad y=h \Rightarrow T=T_1. \quad (4.10)$$

Logo, a expressão para a distribuição da temperatura é obtida [SCH68],

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{y}{h} + \frac{\mu U^2}{2\kappa(T_1 - T_0) h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right). \quad (4.11)$$

Adicionalmente, o parâmetro adimensional,

$$\frac{\mu U^2}{2\kappa(T_1 - T_0)}, \quad (4.12)$$

pode ser reescrito como,

$$\frac{\mu U^2}{2\kappa(T_1 - T_0)} = \frac{\mu C_p}{\kappa} \frac{U^2}{C_p (\Delta T)} = \text{Pr Ec}, \quad (4.13)$$

se considerar  $T_1 - T_0 = (\Delta T)$ .

Finalmente, a solução para a distribuição de temperatura conforme os números adimensionais de Prandtl e Eckert é escrita na forma,

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{y}{h} + \text{Pr Ec} \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right). \quad (4.14)$$

A distribuição de temperatura é “plotada” para vários produtos  $Pr Ec$  na Fig. 4.6.

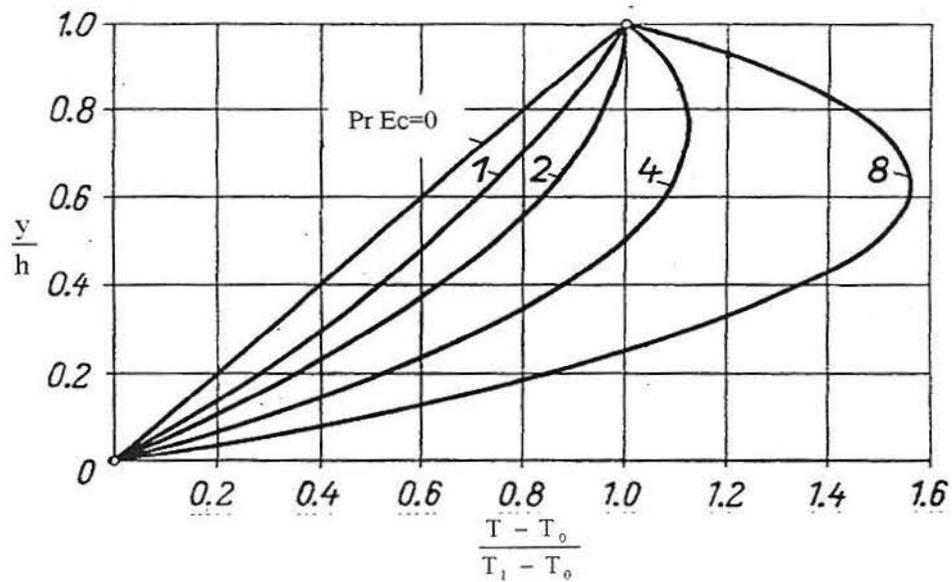


Fig. 4.6 – Distribuição de temperatura no escoamento de Couette para várias relações de  $Pr Ec$  conforme Schlichting [SCH68].

O gráfico da Fig. 4.7 apresenta as soluções obtidas para vários produtos  $Pr Ec$  modelada pelas equações (2.76) - (2.82), pré-definidas na seção 2.5.3 deste trabalho, dum fluido Newtoniano ( $De = 0$ ) sem a presença do termo de flutuabilidade ( $Ra = 0$ ) em regime laminar ( $Re = 300$ ) com temperaturas adimensionais  $T_0 = 5$  e  $T_1 = 3$ , dimensão  $1,0 \times 0,1$  (adimensional) e obtida para uma malha  $20 \times 60$  pontos com espaçamento uniforme.

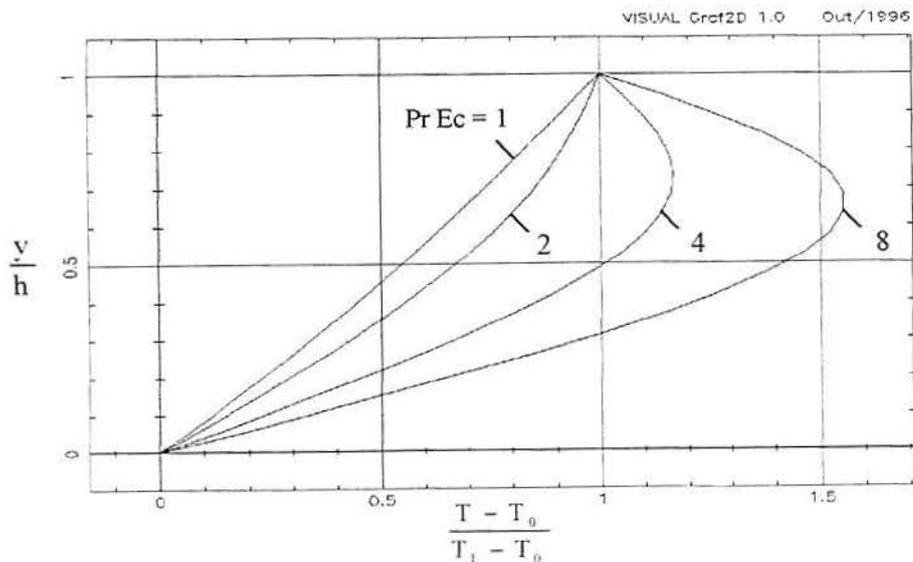


Fig. 4.7 – Distribuição de temperatura no escoamento de Couette (placas paralelas) obtida para vários produtos  $Pr Ec$ .

Observa-se maior dificuldade para captar as curvas de  $Pr Ec$  iguais a 1 e 2, uma vez que os gradientes são menores (pressão, velocidade e temperatura); e também, possivelmente, devido ao fato do uso da formulação incompressível, a qual se caracteriza pelo baixo desempenho para obtenção do campo de pressão. Mas esta melhora para  $Pr Ec$  iguais a 4 e 8, conforme esperado.

O gráfico da Fig. 4.8 compara a solução analítica (4.14) dada por Schlichting e a solução numérica obtida, ambas para  $Pr Ec=8$ .

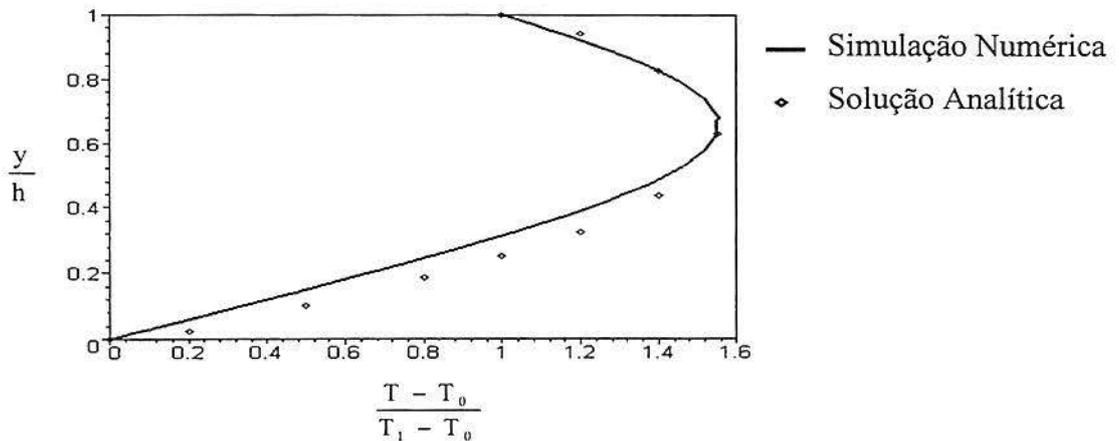


Fig. 4.8 – Comparação da solução numérica e analítica conforme Schlichting [SCH68], para o escoamento de Couette com  $Pr Ec=8$ .

Feita a comparação de soluções entre placas paralelas, parte-se para simulações de situações mais complexas como o escoamento entre cilindros com e sem rotação do cilindro interno, dando continuidade ao processo de calibração do algoritmo computacional.

## 4.2 CILINDROS

Compara-se, aqui, os resultados obtidos para escoamentos de fluidos Newtonianos e não-Newtonianos entre cilindros com dados experimentais e simulações numéricas disponíveis na literatura. Para todos os casos analisados desconsidera-se os efeitos de bordas, ou seja, considera-se os cilindros axialmente longos, conforme representação na Fig 4.9. Admite-se, também, uma excentricidade  $\epsilon$ , dada por:

$$\epsilon = \frac{e}{r_o - r_i} \quad (4.15)$$

onde  $r_o$  e  $r_i$  representam os raios dos cilindros externo e interno, respectivamente, e “ $e$ ” representa a distância entre os centros dos cilindros. A Fig. 4.10 mostra a região bidimensional analisada.

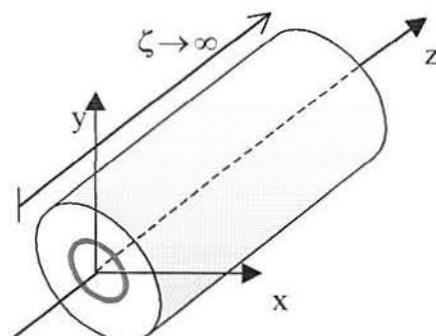


Fig. 4.9 – Representação de cilindros concêntricos de comprimento axial tendendo ao infinito ( $\zeta \rightarrow \infty$ ).

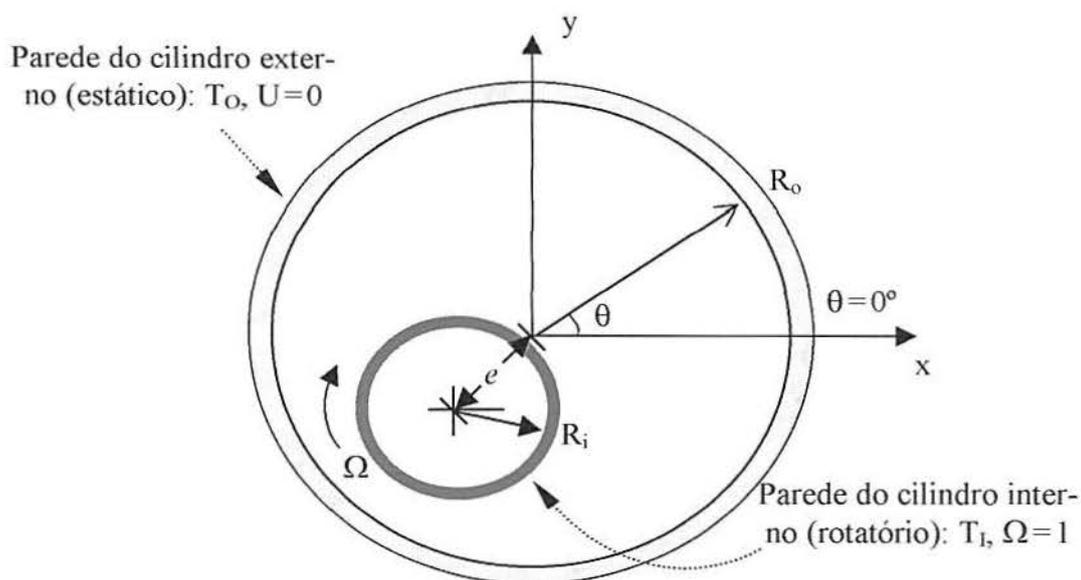


Fig. 4.10 – Representação do plano físico para o escoamento entre cilindros rotatórios.

#### 4.2.1 Fluidos Newtonianos

A distribuição de velocidade e temperatura para o ar entre cilindros rotatórios concêntricos foi investigado por Taylor (1935) conforme Hawarth [HAW64]. Tendo em vista a comparação com estes dados experimentais, houve a necessidade do uso de uma malha mais refinada ( $40 \times 300$  pontos) do que em relação aos casos da seção 4.1 (placas paralelas), com refinamento nas linhas limites conforme Fig. 4.12; isso porque em se tratando da distribuição

da temperatura o gradiente da mesma próximo às paredes é maior. Inicialmente foi utilizada uma malha com espaçamento uniforme, conforme mostrado pela Fig. 4.11; contudo para esta configuração de malha o perfil de temperatura não se mostrava coerente havendo distorções principalmente nas regiões entre  $0 \leq \log \frac{R}{R_i} \leq 0,08$  e  $0,28 \leq \log \frac{R}{R_i} \leq 0,3$ .

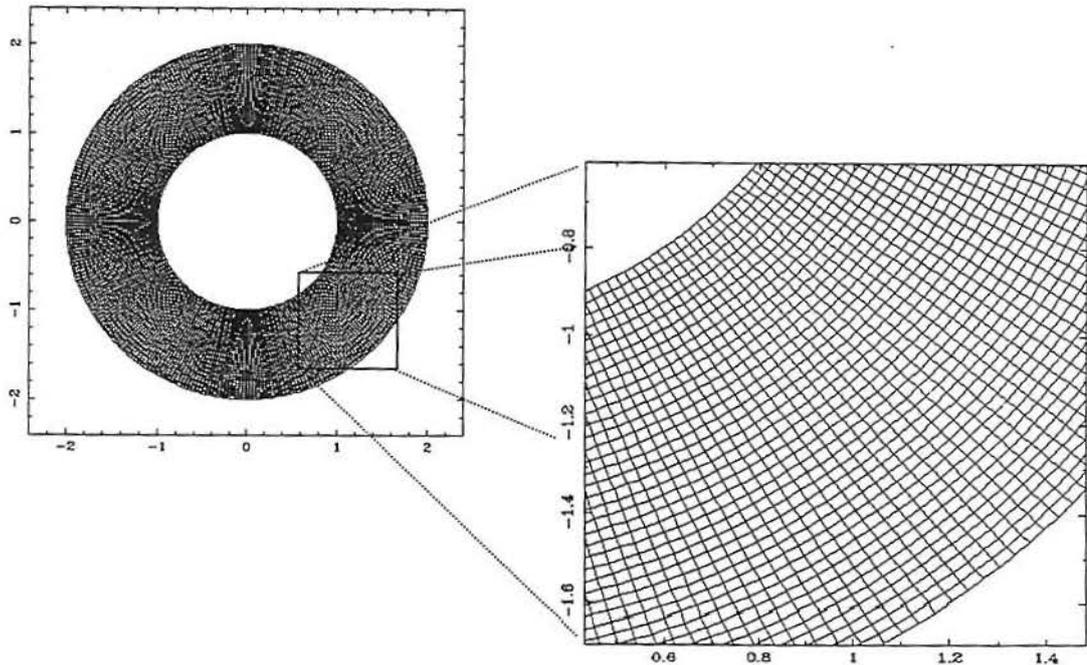


Fig. 4.11 – Malha computacional sem refinamento entre cilindros rotatórios concêntricos.

Os dados experimentais de Taylor para a distribuição de temperatura são “plotados” na Fig. 4.13 juntamente com os obtidos neste trabalho para  $Pr = 0,71$  dum fluido Newtoniano ( $De = 0$ ),  $Ec = 0$ , sem a aproximação de Boussinesq ( $Ra = 0$ ) e em regime laminar ( $Re = 300$ ); razão entre o raio externo e o interno igual a 2 ( $R_o/R_i = 2$ ), com velocidade angular igual a 1 no sentido horário ( $\Omega = 1$ ) e temperaturas adimensionais nas paredes externa e interna 6 e 2, respectivamente.

Próximo às paredes dos cilindros a distribuição da temperatura é difícil de ser obtida experimentalmente com precisão por dificuldades de medida, mas percebe-se um rápido aumento do gradiente perto delas [HAW64], conforme Fig. 4.13. Nota-se que o salto da malha, região entre  $-1,25$  e  $-1,27$  conforme Fig. 4.12, não causa efeitos indesejáveis, isso, talvez devido ao fato de ser esta uma malha integralmente refinada para o domínio considerado.

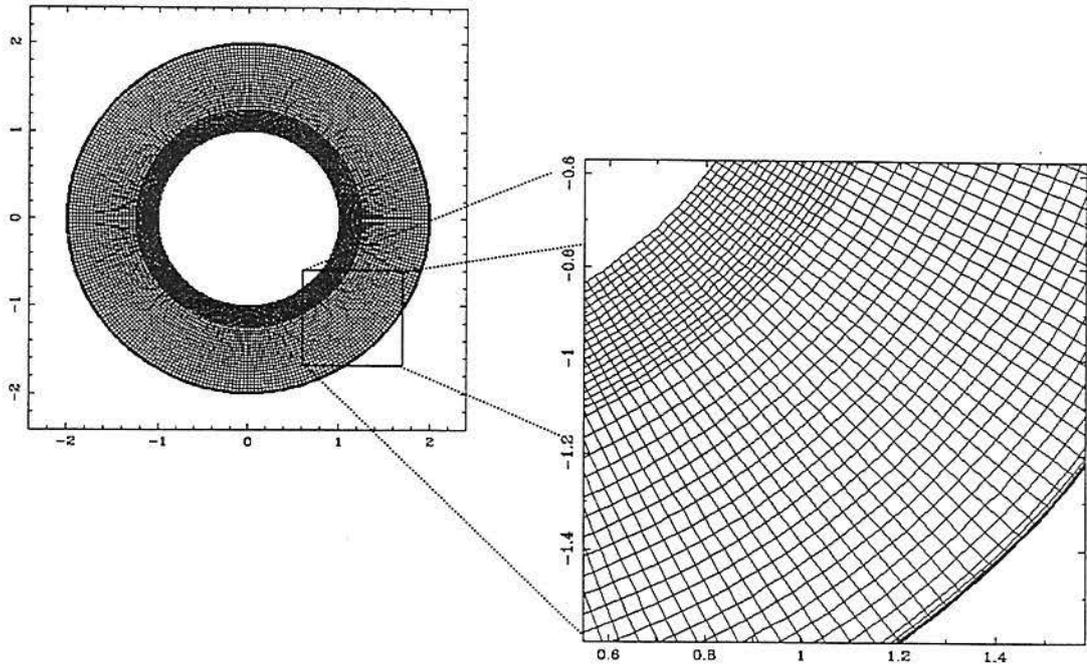


Fig. 4.12 – Malha computacional entre os cilindros com refinamento em regiões específicas.

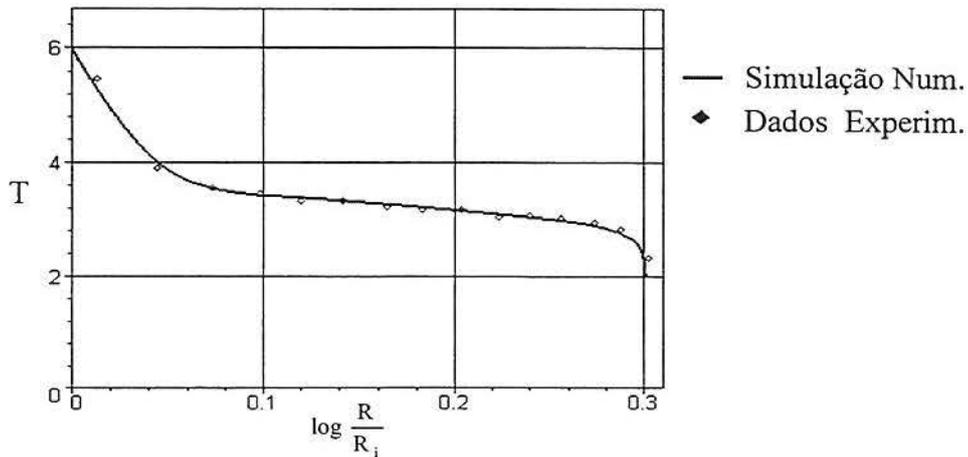


Fig. 4.13 – Comparação da distribuição de temperatura entre cilindros rotatórios concêntricos com os dados experimentais obtidos por Taylor (1935) conforme Hawarth [HAW64].

As figuras 4.14 e 4.15 mostram, respectivamente, as isotermas e as linhas de corrente para o caso de convecção natural, com  $Ra = 10^5$  e  $Pr = 0,71$  para cilindros com temperaturas 1 (interno) e 0 (externo), e com excentricidade 0,8, usando o *software* de visualização Visual3.1 [JUS99]. A malha computacional usada é de  $31 \times 61$  pontos igualmente espaçados. Os resultados aproximam-se dos apresentados por Ming-I et al. [MIN98]. As linhas de corrente e as isotermas são simétricas em relação ao eixo vertical ( $\theta = 90^\circ$ ). Percebe-se também que o

calor dissipado tende a se distribuir por toda a cavidade uniformemente. As mesmas observações são válidas para cilindros sem excentricidade conforme indicam as figuras 4.16 e 4.17. Vale salientar que numericamente é impossível usar  $Re = 0$ , e matematicamente inconsistente; logo a alternativa foi usar valores gradativamente menores, até chegar a um valor considerado baixo e não proibitivo computacionalmente (que não cause divergência), neste caso 0,03. Isso justifica os valores elevados apresentados pelos mapas de cores das figuras 4.15 e 4.17, se avaliado os termos das equações onde tem-se o parâmetro de Reynolds como denominador para este valor.

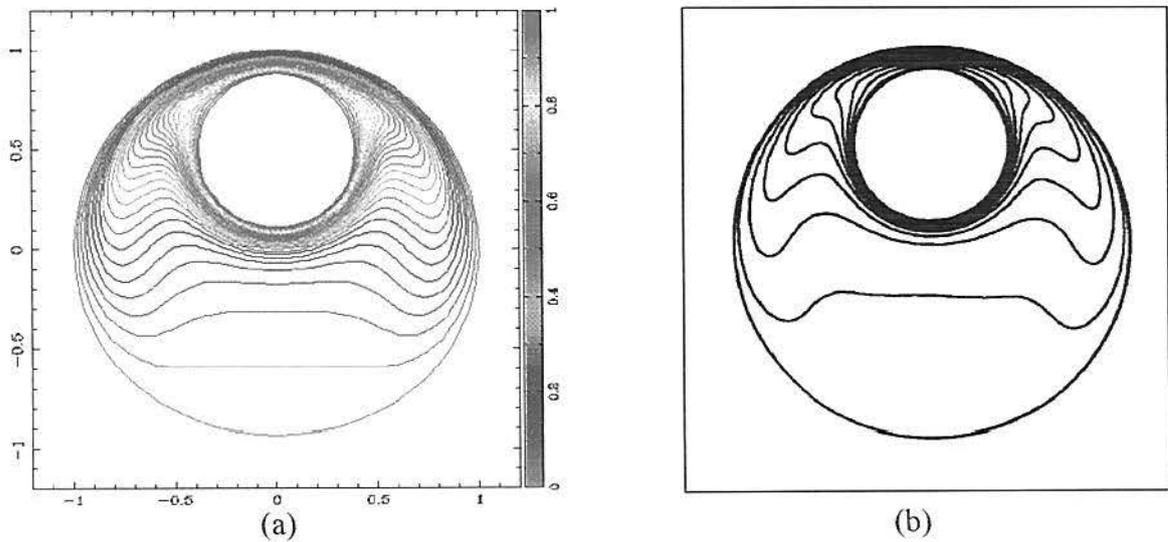


Fig. 4.14 – Comparação das isotermas: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98];  $Re=0$ ,  $Ra=10^5$ .

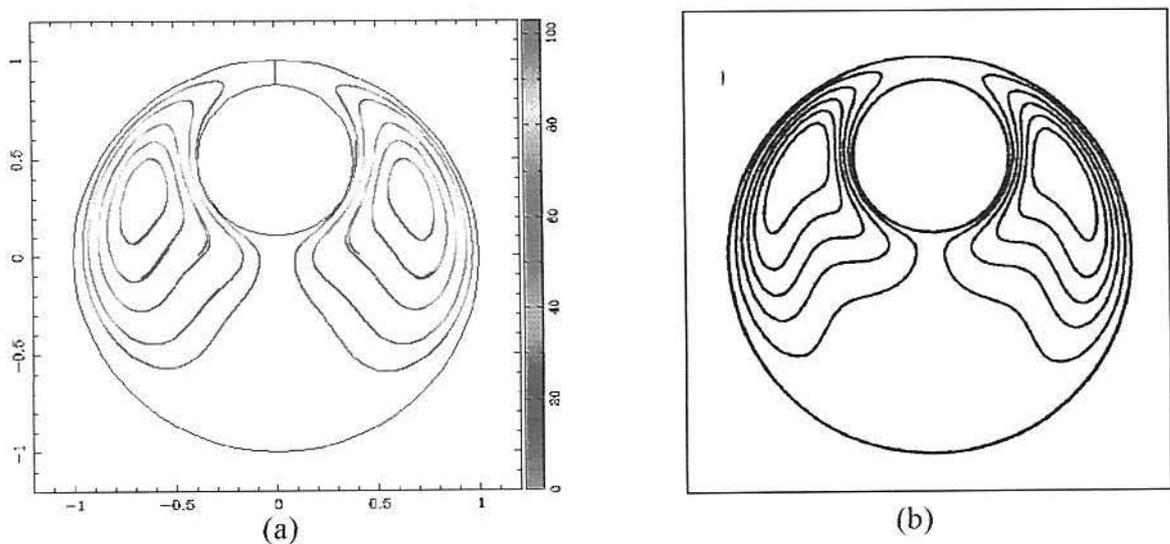


Fig. 4.15 – Comparação das linhas de corrente: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98];  $Re=0$ ,  $Ra=10^5$ .

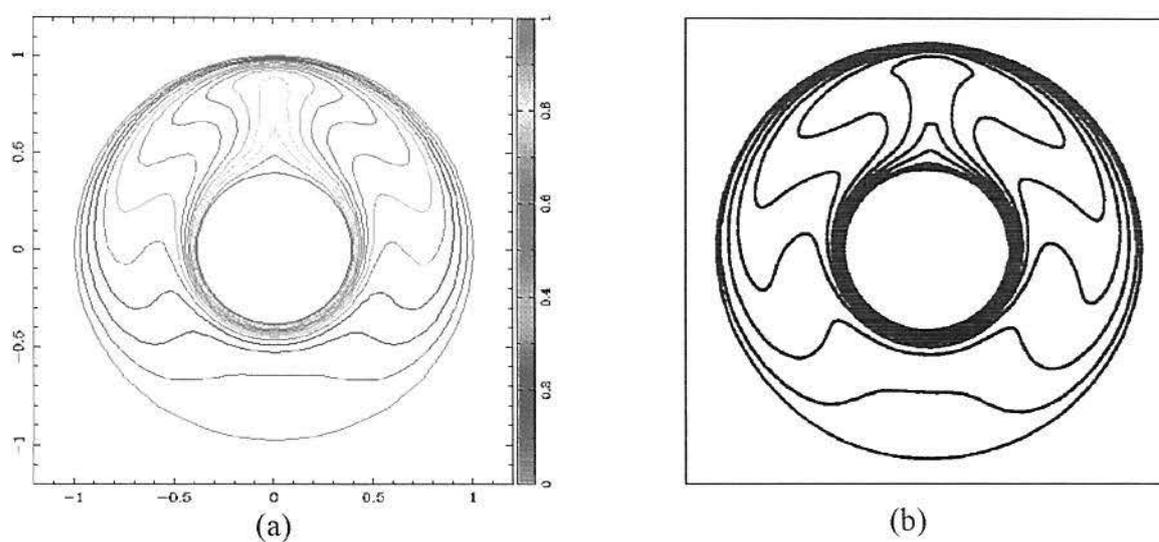


Fig. 4.16 – Comparação das linhas de corrente: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98];  $Re=0$ ,  $Ra=10^5$ .

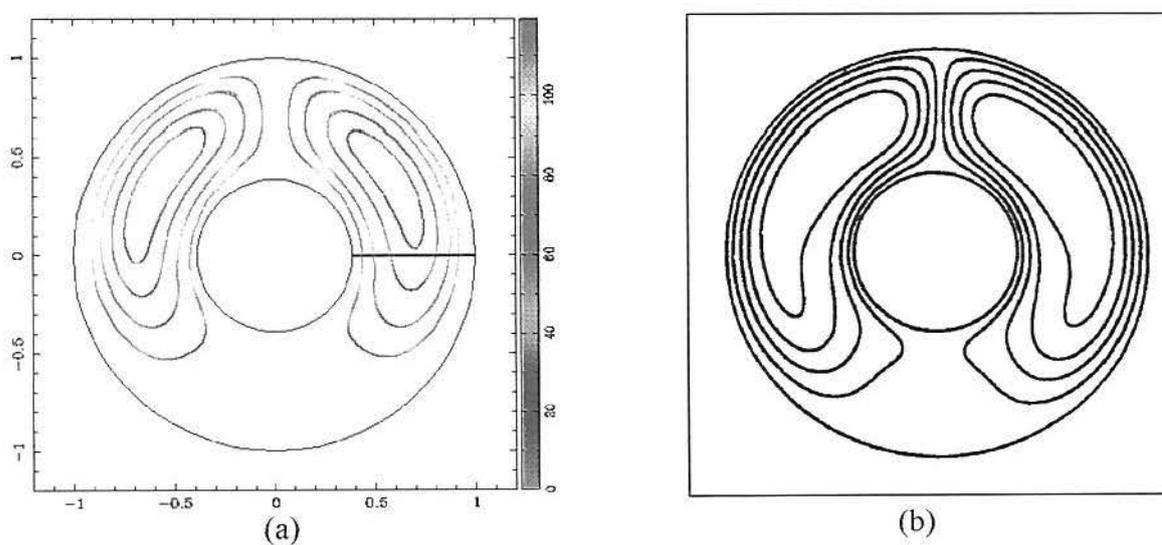


Fig. 4.17 – Comparação das linhas de corrente: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98];  $Re=0$ ,  $Ra=10^5$ .

Quando o cilindro interno é colocado em movimento com velocidade angular igual a 1 no sentido horário ( $\Omega = 1$ ),  $Re = 378$  e  $Ra = 10^5$ , o escoamento não é mais simétrico, aparecendo um grande refluxo no lado direito, como mostra a Fig. 4.19. A distribuição da temperatura também é afetada conforme ilustrado na Fig. 4.18. Ou seja, aqui percebe-se a influência da força centrífuga caracterizando a convecção mista. Verifica-se que, segundo a

classificação de Bejan [BEJ84], o quociente de parâmetros adimensionais é 0,99, para esta análise.

$$\frac{Ra}{Pr Re^2} = \frac{Gr}{Re^2} \begin{cases} \ll 1 & \text{Convecção Forçada} \\ \approx 1 & \text{Convecção Mista} \\ \gg 1 & \text{Convecção Natural (Livre)} \end{cases}$$

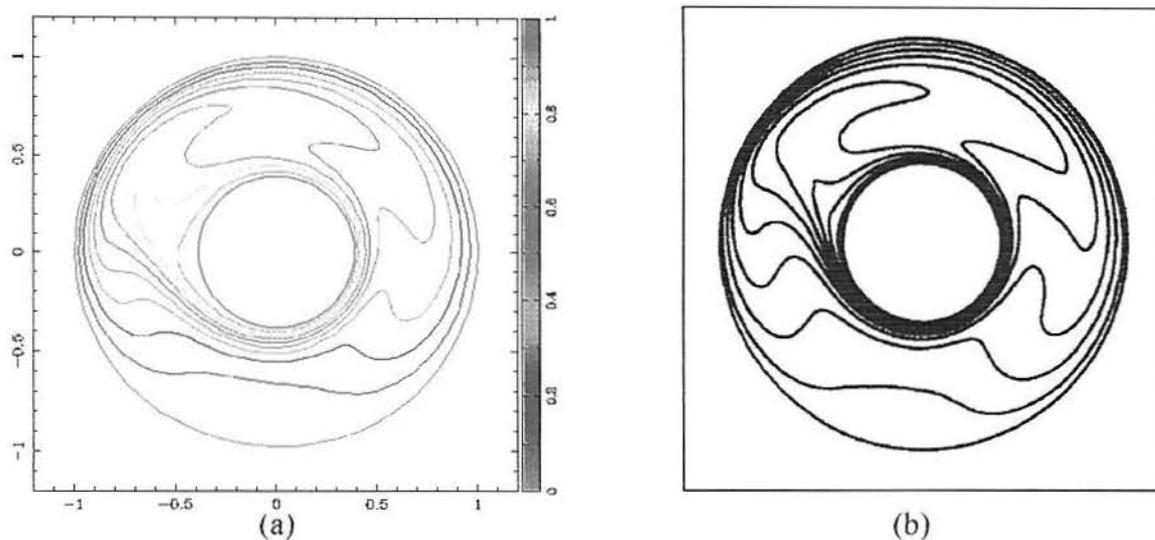


Fig. 4.18 – Comparação das isothermas: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98];  $Re=378$ ,  $Ra=10^5$ .

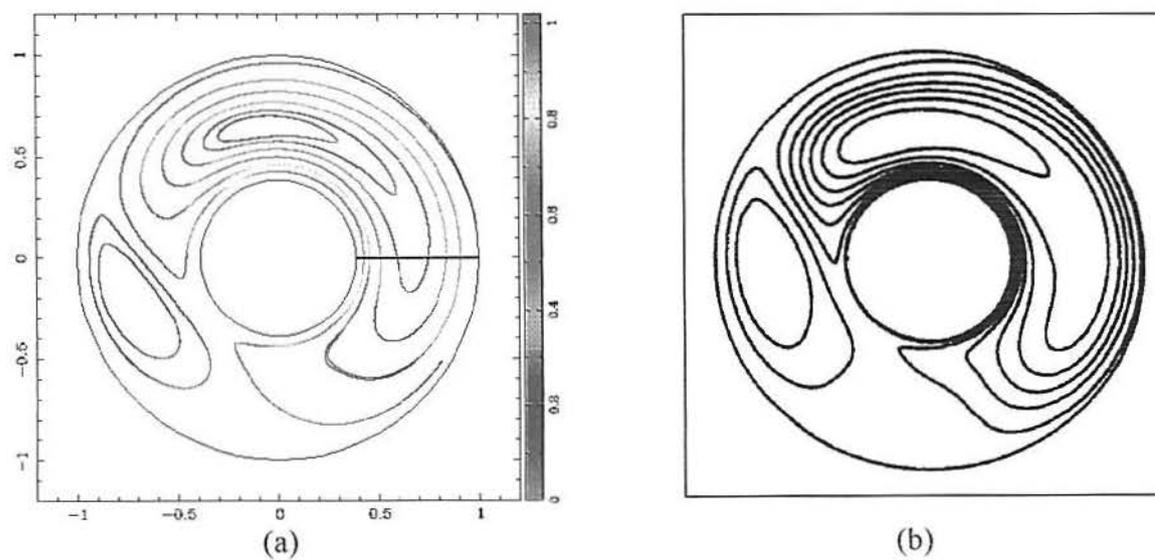


Fig. 4.19 – Comparação das linhas de corrente: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98];  $Re=378$ ,  $Ra=10^5$ .

Para o caso de  $Re = 1195$ , representado pelas figuras 4.20 e 4.21 houve a necessidade duma malha mais refinada ( $41 \times 81$  pontos) afim de melhor captar as variações da temperatura e as linhas de corrente. O uso do parâmetro Reynolds relativamente elevado desde as primeiras iterações causou divergência do método computacional utilizado; logo optou-se por um aumento gradativo do mesmo (600, 800, 1195) no decorrer das iterações.

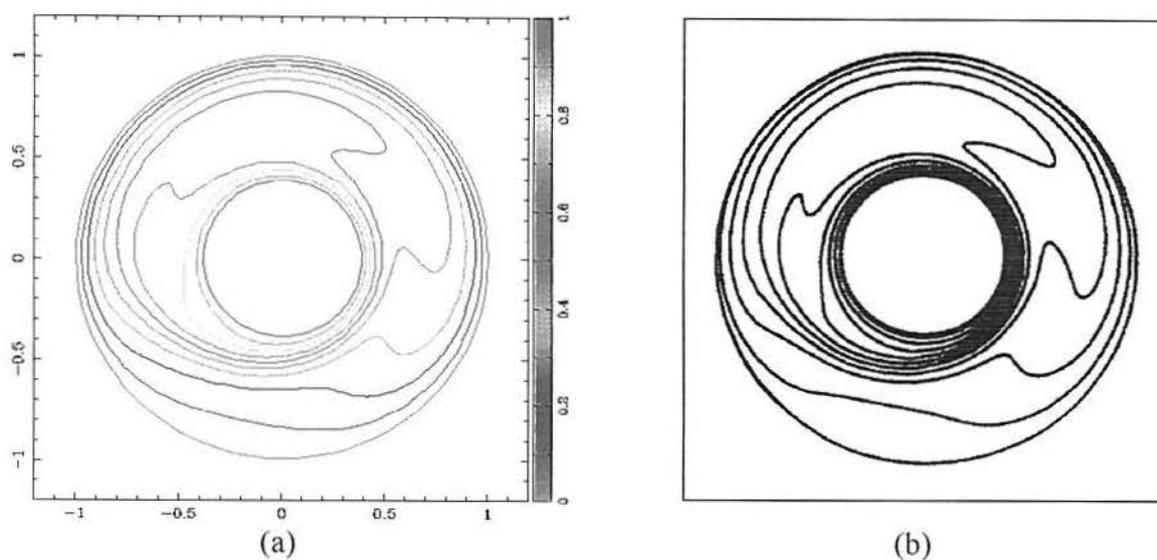


Fig. 4.20 – Comparação das linhas de corrente: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98];  $Re = 1195$ ,  $Ra = 10^5$ .

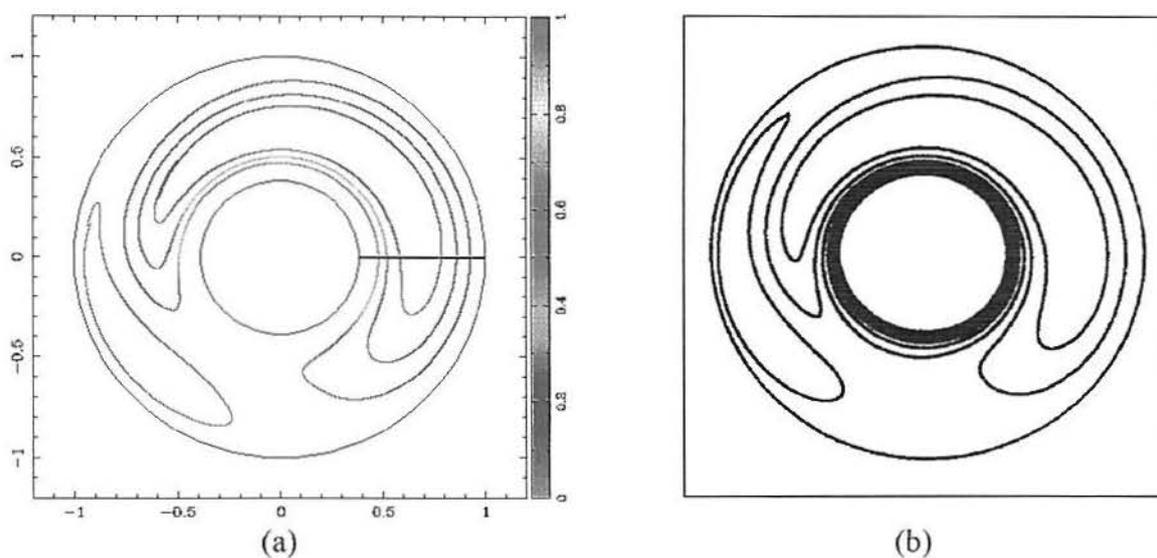


Fig. 4.21 – Comparação das linhas de corrente: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Ming-I et al. [MIN98];  $Re = 1195$ ,  $Ra = 10^5$ .

Nota-se para estes casos (convecção natural e mista) a existência de algumas diferenças com relação aos resultados apresentados por Ming-I et al. [MIN98] via volumes

finitos, talvez devido ao fato de haver diferença entre os procedimentos utilizados. Com o aumento do número de Reynolds de 0 a 1195, que é equivalente ao decréscimo do quociente  $\frac{Ra}{Pr Re^2}$  de  $\infty$  (convecção natural pura) a 0,1, as isothermas diminuem a sua área de abrangência (amplitude). Isto indica que a distribuição de temperatura torna-se mais uniforme entre os cilindros com o aumento do número de Reynolds.

A fim de caracterizar as diferenças entre escoamentos Newtonianos e não-Newtonianos na próxima sub-secção, simulou-se o escoamento dum fluido Newtoniano ( $De = 0$ ) com  $Pr = 5,625$ ,  $Ec = 0,002$  e  $De = 4,2 \times 10^{-3}$ , entre cilindros rotatórios com excentricidade  $\varepsilon = 0,64$  (para reproduzir a situação indicada por [LI94]), sem a aproximação de Boussinesq ( $Ra = 0$ ) e em regime laminar ( $Re = 10$ ); razão entre o raio externo e o interno de  $1\frac{2}{3}$  ( $R_o/R_i = 1,0/0,6$ ), com velocidade angular igual a 1 no sentido horário ( $\Omega = 1$ ) e com as mesmas temperaturas nas paredes externa e interna de 1,367, ilustrado na Fig. 4.22, para uma malha de  $21 \times 41$  pontos com refinamento (veja Fig. 4.23).

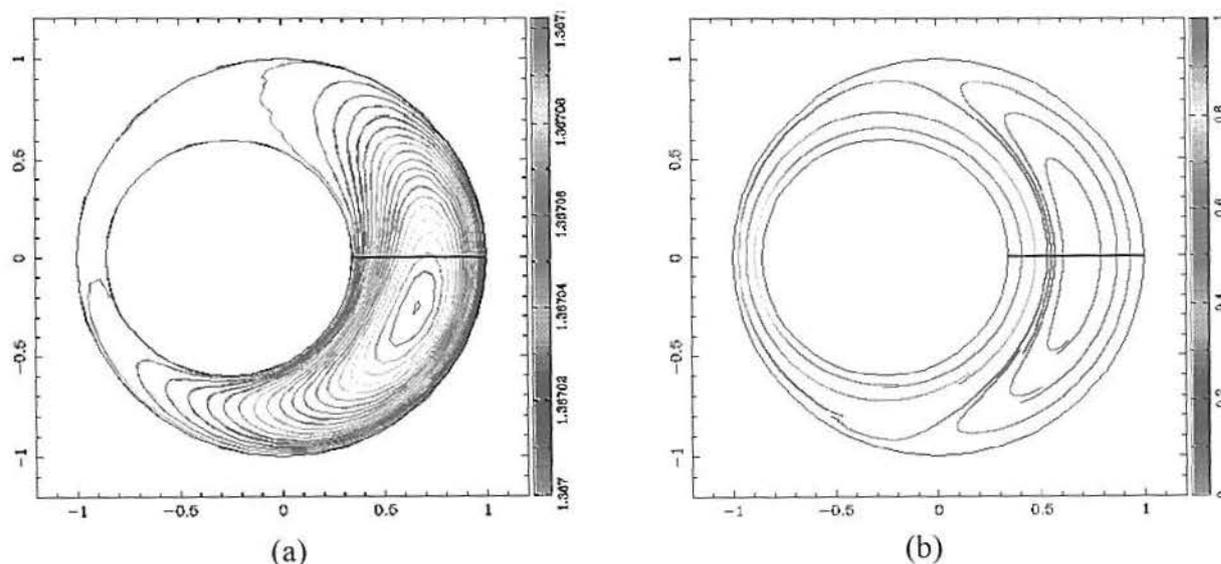


Fig. 4.22 – Solução numérica dum fluxo Newtoniano com  $Pr = 5,625$  e  $Re = 10$ : (a) isothermas e (b) linhas de corrente.

#### 4.2.2 Fluidos não-Newtonianos

A distribuição de temperatura para fluidos não-Newtonianos entre cilindros rotatórios com excentricidade foi investigado por Li e Davies [LI94], pelo método pseudo-espectral com transformação bipolar (quociente entre relações trigonométricas: senos e cossenos) para a dis-

cretização espacial das equações governantes e aproximação temporal de primeira ordem para a pressão.

Inicialmente utilizou-se uma malha não refinada próximo às paredes, mas devido aos gradientes de velocidade relativamente altos nestas regiões com o aumento da taxa de cisalhamento [NAF00], houve a necessidade de refinamento. A Fig. 4.23 ilustra uma das malhas utilizadas de  $21 \times 41$  pontos, com refinamento próximo às paredes dos cilindros. Outro aspecto importante para a convergência, que merece ser salientado, sendo recomendado pelo *Nafems – CFD Working Group* [NAF00], é o uso do campo de velocidade dum fluido Newtoniano como ponto de partida (primeiras iterações) para análise (simulação) de fluidos não-Newtonianos.

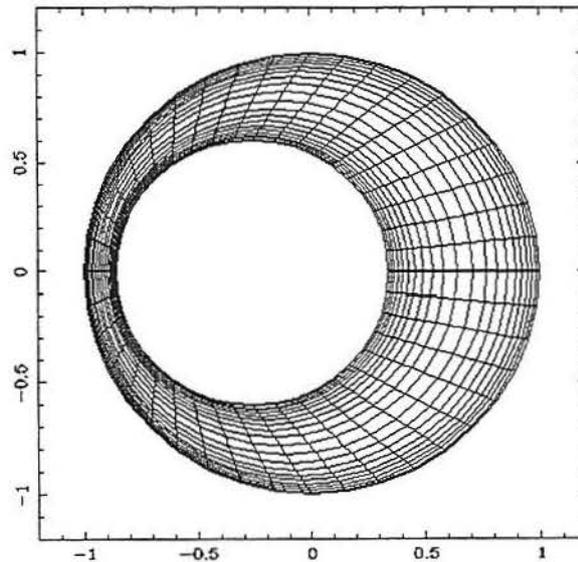


Fig. 4.23 – Malha computacional de  $21 \times 41$  pontos com refinamento próximo às paredes dos cilindros.

Considere  $\Gamma$  denotando a fronteira (parede) do cilindro interno ou externo. Admite-se condição térmica de Dirichlet,

$$T = T_r \quad \text{em } \Gamma, \quad (4.15)$$

e de Robbins,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \frac{\text{Bi}}{H} (T_r - T_r) \quad \text{em } \Gamma, \quad (4.16)$$

onde  $Bi$  representa o número de Biot,  $h$  uma espessura característica (neste trabalho a maior distância entre os cilindros) e  $T_\Gamma$  a temperatura sobre a fronteira  $\Gamma$ . A condição (4.15) pode ser vista como um caso limite de (4.16) com  $Bi \rightarrow \infty$ . Noutro extremo ( $Bi=0$ ) tem-se condição de fronteira adiabática,

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{em } \Gamma. \quad (4.17)$$

Considera-se as seguintes combinações:

DI-DO

$$\begin{aligned} T &= T_1 && \text{no cilindro interno rotatório,} \\ T &= T_0 && \text{no cilindro externo estático,} \end{aligned} \quad (4.18)$$

RI-DO

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} &= \frac{Bi}{H} (T_{ri} - T_1) && \text{no cilindro interno rotatório,} \\ T &= T_0 && \text{no cilindro externo estático,} \end{aligned} \quad (4.19)$$

DI-RO

$$\begin{aligned} T &= T_1 && \text{no cilindro interno rotatório,} \\ \frac{\partial T}{\partial n} &= \frac{Bi}{H} (T_{ro} - T_0) && \text{no cilindro externo estático.} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Compara-se com simulações apresentadas pelo artigo de Li e Davies, o resultado obtido para o escoamento dum fluido com  $Pr = 5,625$ ,  $Ec = 0,002$  e  $De = 4,2 \times 10^{-3}$ , entre cilindros rotatórios com excentricidade  $\varepsilon = 0,64$ , sem a aproximação de Boussinesq ( $Ra = 0$ ) e em regime laminar ( $Re = 10$ ); razão entre o raio externo e o interno de  $1\frac{2}{3}$  ( $R_o/R_i = 1,0/0,6$ ), com velocidade angular igual a 1 no sentido horário ( $\Omega = 1$ ) e com as mesmas temperaturas nas paredes externa e interna de 1,367, condição DI-DO. Este resultado é comparado na Fig. 4.24. Devido à dificuldades de identificação do valor das isothermas apresentadas na literatura, “plota-se” basicamente o mesmo número de isothermas.

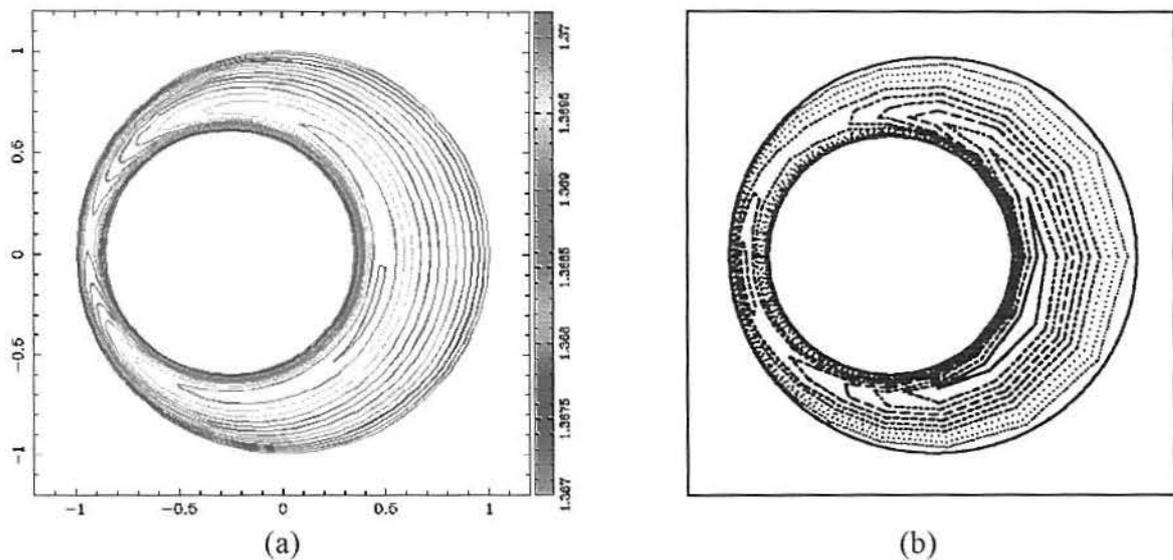


Fig. 4.24 – Comparação das isotermas: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Li e Davies [LI94],  $Re=10$ ,  $De=4,2 \times 10^{-3}$ ,  $Ec=0,002$  com condição de contorno DI-DO,  $T_I=T_O=1,367$ ,  $\varepsilon=0,64$ .

Os resultados da Fig. 4.24 e 4.25 quando comparados com os da Fig. 4.22 (a) demonstram as diferenças causadas pela hipótese de fluido não-Newtoniano.

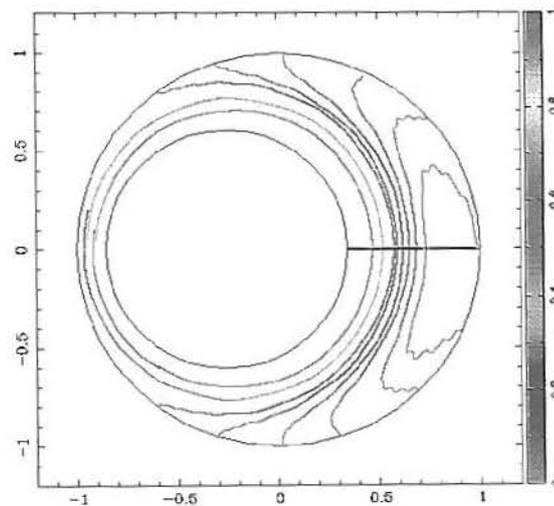


Fig. 4.25 – Linhas de corrente para  $Re=10$ ,  $De=4,2 \times 10^{-3}$ ,  $Ec=0,002$  com condição de contorno DI-DO,  $T_I=T_O=1,367$ ,  $\varepsilon=0,64$ .

Utilizando a condição de fronteira térmica (4.19) RI-DO com  $Bi=1$  obteve-se uma configuração para a solução não consistente com aquela apresentada pelo artigo; as temperaturas extremas obtidas superaram os limites: 1,373 a 1,428, apresentadas pelo artigo de Li e Davies. Essa incoerência talvez possa ser atribuída aos diferentes métodos de solução numérica utilizados ou ao fato de não estar considerando a variação da viscosidade no

processo neste trabalho. Mas quando da utilização dum  $Bi=0,001$ , condição quase adiabática, a solução tende a assemelhar-se à solução desejada, conforme mostra a Fig. 4.26.

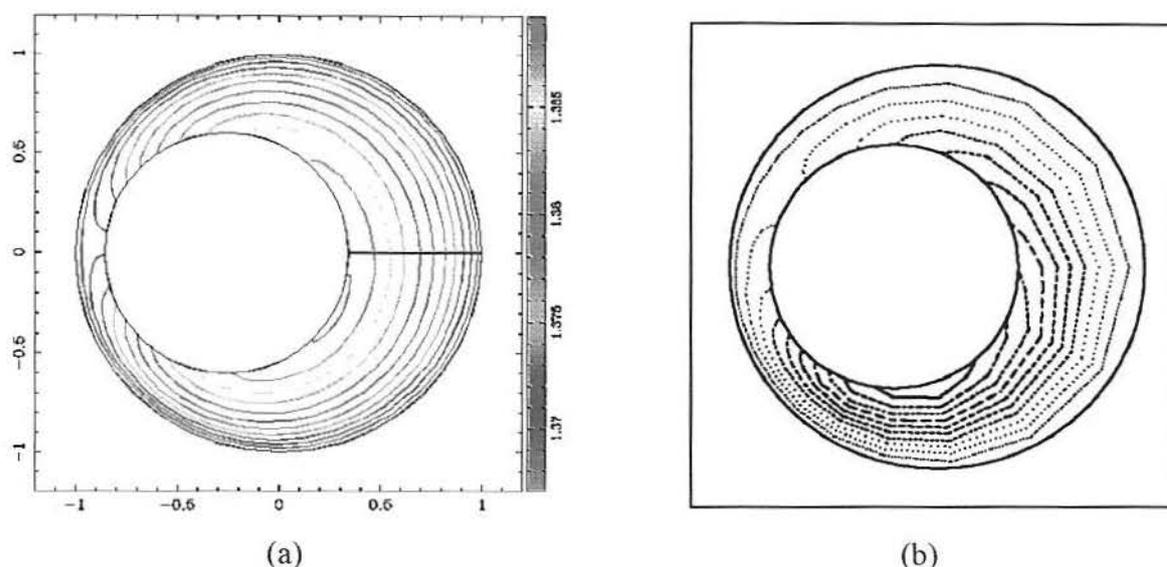


Fig. 4.26 – Comparação das isothermas: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Li e Davies [LI94],  $Re = 10$ ,  $De = 4,2 \times 10^{-3}$ ,  $Ec = 0,002$ , condição de contorno RI-DO,  $T_{r1} = 1,349$ ,  $T_O = T_I = 1,367$ ,  $\varepsilon = 0,64$  e com  $Bi=0,001$ .

O mesmo número de Biot ( $Bi=0,001$ ) foi adotado para a condição de fronteira DI-RO, conforme solução apresentada pela Fig. 4.27. Os resultados são semelhantes para baixo número de Biot, para a espessura “h” adotada.

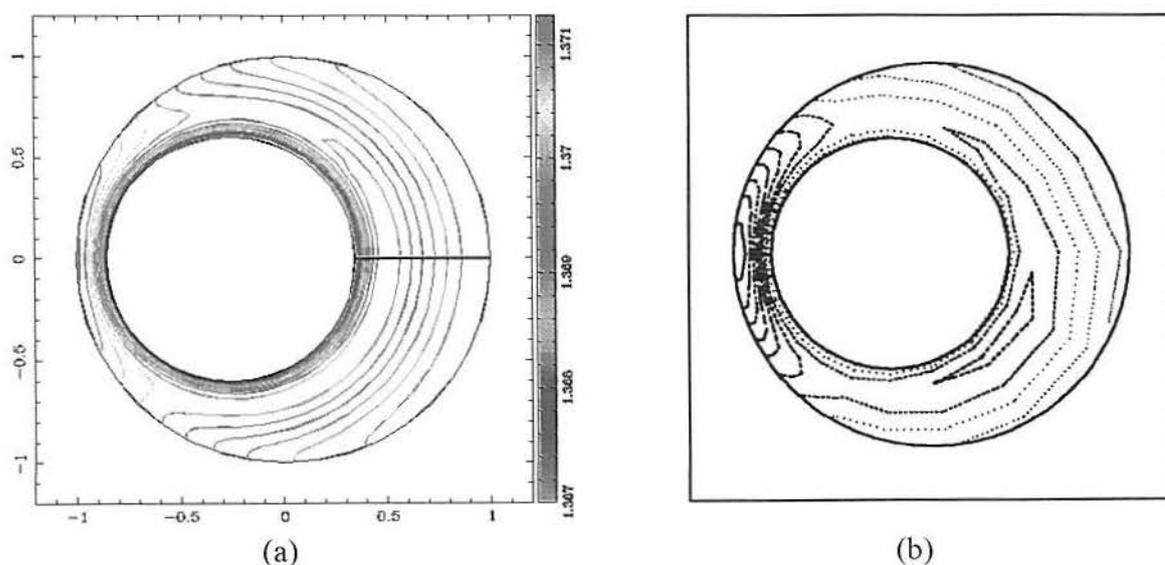


Fig. 4.27 – Comparação das isothermas: (a) presente trabalho (b) simulação numérica apresentada por Li e Davies [LI94],  $Re = 10$ ,  $De = 4,2 \times 10^{-3}$ ,  $Ec = 0,002$ , condição de contorno DI-RO,  $T_{r0} = 1,349$ ,  $T_O = T_I = 1,367$ ,  $\varepsilon = 0,64$  e com  $Bi=0,001$ .

Complexidade adicional surge na análise da influência da aplicação de diferentes tipos de condições de contorno com a presença de adimensionais como Biot (Nusselt, Grashof) entre outros, o que foge ao escopo da presente dissertação.

Usando excentricidades diferentes para a condição DI-DO,  $T_1=T_0=1,367$ ,  $\varepsilon=0,1, 0,5, 0,8$  e  $0,95$ , percebe-se que a temperatura aumenta nas proximidades da pequena fenda (menor distância entre os cilindros), conforme Fig. 4.28. Este efeito era esperado já que o aumento da excentricidade conduz a um acréscimo local (pequena fenda) da taxa de cisalhamento e, conseqüentemente, da tensão de cisalhamento.

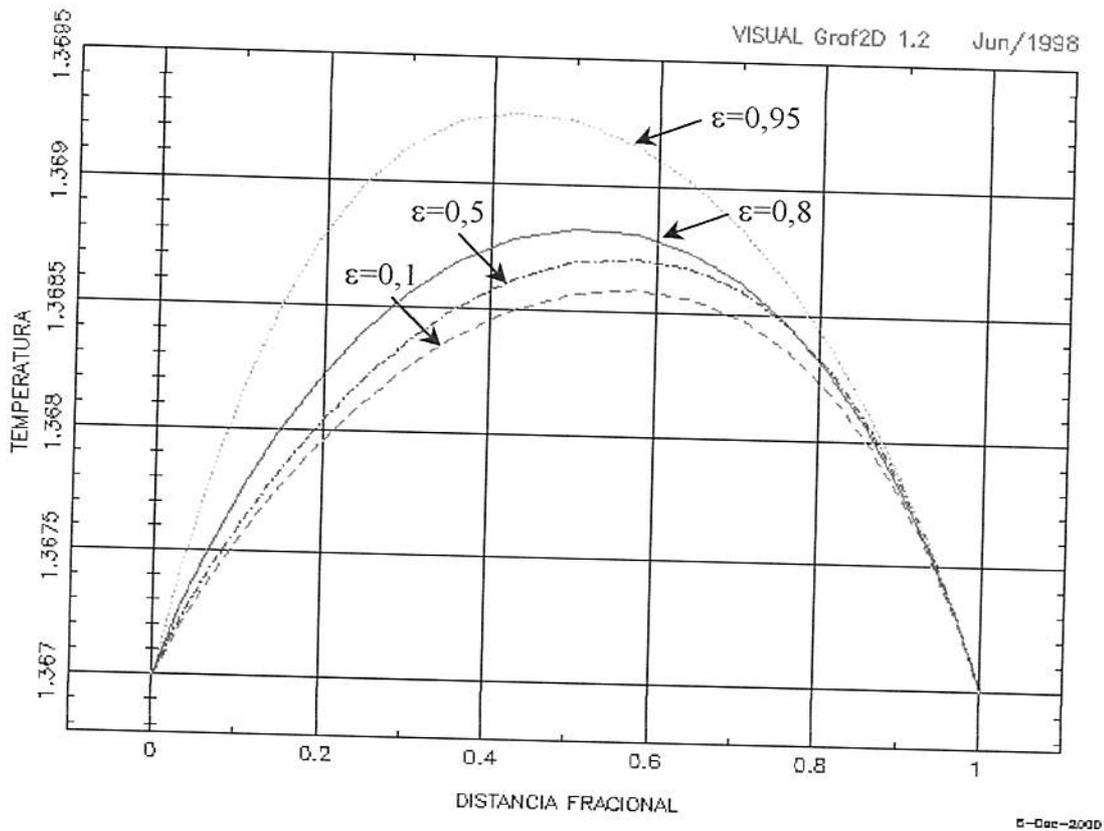


Fig. 4.28 – Efeito do aumento da excentricidade no perfil de temperatura através da pequena fenda entre o cilindro interno e externo:  $\varepsilon=0,1, 0,5, 0,8$  e  $0,95$ , com condição de contorno DI-DO,  $T_1=T_0=1,367$ .

As figuras 4.29 a 4.31 mostram as isotermas obtidas para  $\varepsilon = 0,1, 0,5$  e  $0,95$ , respectivamente. Para os casos com excentricidade até  $0,8$  usou-se uma malha de  $21 \times 41$  pontos com fator de refinamento de  $1,1$  (conforme Fig. 4.23, já apresentada). Mas para excentricidade  $\varepsilon = 0,95$  houve a necessidade duma malha mais refinada de  $31 \times 401$  pontos com o mesmo fator de refinamento  $1,1$ , por razões de convergência, devido à suavidade da malha.

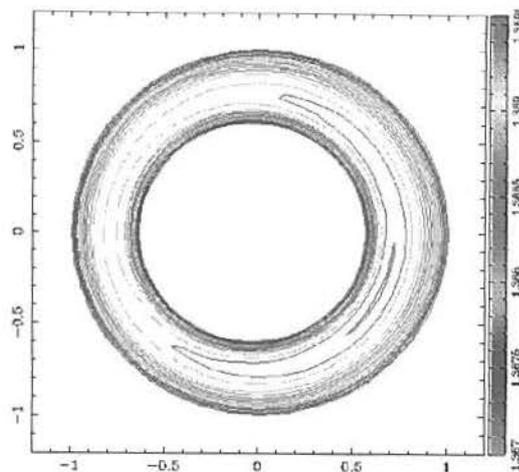


Fig. 4.29 – Isotermas:  $\varepsilon = 0,1$ ,  $Re = 10$ ,  $De = 4,2 \times 10^{-3}$  e  $Ec = 0,002$ , com condição de contorno DI-DO,  $T_I = T_O = 1,367$ .

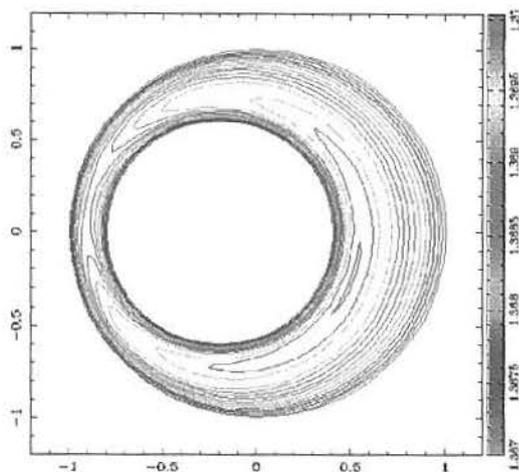


Fig. 4.30 – Isotermas:  $\varepsilon = 0,5$ ,  $Re = 10$ ,  $De = 4,2 \times 10^{-3}$  e  $Ec = 0,002$ , com condição de contorno DI-DO,  $T_I = T_O = 1,367$ .

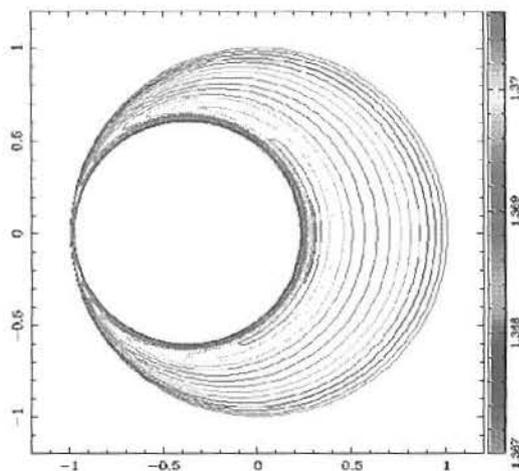


Fig. 4.31 – Isotermas:  $\varepsilon = 0,95$ ,  $Re = 10$ ,  $De = 4,2 \times 10^{-3}$  e  $Ec = 0,002$ , com condição de contorno DI-DO,  $T_I = T_O = 1,367$ .

## 5. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

### 5.1 CONCLUSÕES

Dada a importância do escoamento de fluidos viscosos, como já citado, em processos industriais e naturais, especificamente àqueles aplicados a rolamentos e engrenagens (sistemas hidráulicos de máquinas agrícolas, motores de automóveis, turbinas de avião, entre outros), envolvendo diversas ciências como a matemática, a engenharia, a reologia, entre outras; tinha-se como objetivos principais no decorrer deste trabalho:

- Considerar modelos de relações constitutivas complementares de fluidos viscosos na qual a relação tensão-deformação pudesse ser aplicada tanto a fluidos Newtonianos como não-Newtonianos pelo uso do conceito do efeito de memória dum fluido em escoamento expresso pelo parâmetro adimensional de Deborah.
- Considerar o sistema de coordenadas generalizadas tornando o algoritmo computacional versátil para aplicação de domínios quaisquer.
- Empregar a aproximação de diferenças finitas estabelecendo limites para o uso desta técnica em escoamentos complexos em geometrias variadas.

A validação do algoritmo computacional teve os seguintes estágios:

- Escoamento de fluidos Newtonianos ( $De = 0$ ) entre placas paralelas segundo expressões matemáticas para um gradiente adimensional de pressão e para a difusividade térmica com base no produto  $PrEc$ , conforme expressões dadas por Schlichting [SCH68].
- Cotejar diferenças e semelhanças segundo as soluções obtidas e os dados experimentais [HAW64] para um fluido Newtoniano entre cilindros concêntricos rotatórios.

- Comparar com soluções numéricas obtidas por Ming-I et al. [MIN98] para o caso de transferência de calor por convecção natural entre cilindros com excentricidade e transferência de calor por convecção mista entre cilindros concêntricos rotatórios.
- Confrontar as soluções obtidas segundo o modelo considerado, com a hipótese de fluido não-Newtoniano ( $De > 0$ ), com as soluções de Li e Davies [LI94], obtidas segundo um modelo complexo e um método de solução também complexo.

Os perfis de velocidade obtidos para vários valores do gradiente adimensional de pressão  $P$  demonstram boa aproximação com os perfis apresentados por Schlichting. Nota-se que o escoamento é reverso para  $P < 0$ . Já no caso de difusividade térmica segundo variações do produto  $Pr Ec$  houve dificuldades para achar os perfis para  $Pr Ec$  baixo, mas para produtos mais elevados os resultados são satisfatórios.

A comparação com dados experimentais de fluidos Newtonianos entre cilindros rotatórios concêntricos mostram que os resultados numéricos apresentam coerência com o fenômeno físico. A obtenção dos dados experimentais, próximo às paredes dos cilindros, demonstra dificuldades de medida da temperatura; já o método numérico dá uma idéia do comportamento nestas regiões.

Já a comparação com soluções numéricas para a convecção natural e mista para fluidos Newtonianos apresenta poucas diferenças, salvo aquelas simulações com  $Re \rightarrow 0$ , onde as linhas de corrente apresentam diferenças entre as velocidades esperadas, pois extrapolam o limite da velocidade do cilindro interno. As isotermas são aceitáveis ficando entre os limites de temperatura do cilindro interno e externo apresentadas na literatura.

Os resultados para fluxos não-Newtonianos mostram-se satisfatórios se forem admitidos números de Biot pequenos, isso como já mencionado devido à complexidade introduzida na aplicação das condições de contorno. Nota-se perfeitamente o efeito não-Newtoniano via aumento da taxa de cisalhamento e, conseqüentemente, da tensão de cisalhamento quando consideradas diferentes excentricidades entre os cilindros. Para esses casos de escoamentos não-Newtonianos houve necessidade dum refinamento mais acentuado próximo às paredes dos cilindros.

A implementação do modelo genérico tanto para fluidos incompressíveis Newtonianos quanto não-Newtonianos para superfícies móveis, especificamente placas móveis (Couette) e cilindros rotatórios, ou seja, equações de Navier, equação para a pressão do tipo Poisson e uma equação para a temperatura, os quais são modelados pelas equações do modelo *Convected Maxwell*, apresenta resultados significativos quando

comparados com dados experimentais, soluções analíticas e numéricas encontradas na literatura.

Verifica-se que a convergência, quando do emprego da aproximação em diferenças finitas, torna-se morosa quando do uso de malhas em que as linhas são não suaves, como por exemplo para grandes excentricidades com números de pontos na direção do raio maior que o número destes na direção angular, principalmente para fluidos não-Newtonianos onde as tensões variam muito. O desempenho computacional do *software* desenvolvido ficou compreendido entre 540MFlops e 970MFlops no Cray T94 do CESUP/RS, dependendo do refinamento utilizado; quanto mais concentrado em determinadas regiões menor o rendimento em operações por segundo.

Baseado nos resultados obtidos e sua comparação com os apresentados na literatura tanto em coordenadas cartesianas como generalizadas, fluxos de convecção natural e mista, Newtonianos e não-Newtonianos (fracamente), o presente trabalho contribui para o estudo de problemas encontrados na engenharia matemática, principalmente por ser uma metodologia simples, fornecendo resultados tão bons quanto aqueles apresentados por diferentes autores através de metodologias mais complexas.

## 5.2 PERSPECTIVAS

Inúmeras questões surgiram no desenvolvimento deste trabalho, especificamente quanto à aplicação das condições de contorno para fluxos não-Newtonianos. A complexidade envolvida na análise matemática deste desenvolvimento poderia conduzir à inúmeros trabalhos de pesquisa.

Além disso, considerar fluxos transientes com variações de temperatura maiores que possibilitem estabelecer os limites do procedimento adotado neste trabalho e comparar os resultados com os das equações escritas na forma compressível utilizando outros métodos de solução e comparando-os são alguns dos problemas desafiadores.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [AND84] ANDERSON, D. A.; TANNEHIL, I. C.; PLETCHER, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**. N. York: McGraw-Hill, 1984.
- [BAR93] BARNES, H. A.; HUTTON, J. F.; WALTERS, F. R. S.; An Introduction to Rheology. **Rheology Series**. Netherlands: Elsevier Science Publishers, v.3, 3.ed., 1993. 199p.
- [BEJ84] BEJAN, A.; **Convection Heat Transfer**. New York: John Wiley & Sons, 1984. 623 p.
- [BEJ95] BEJAN, A., **Heat Transfer**. New York: John Wiley & Sons, 1995. 625p.
- [BER84] BERIS, A. N.; ARMSTRONG, R. C.; BROWN, R. A.; Finite Element Calculation of Viscoelastic Flow in a Journal Bearing: I. Small Eccentricities. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**. n.16, p.141-172, 1984.
- [BER86] BERIS, A. N.; ARMSTRONG, R. C.; BROWN, R. A.; Finite Element Calculation of Viscoelastic Flow in a Journal Bearing: II. Moderate Eccentricity. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**. n.19, p.323-347, 1986.
- [BER87] BERIS, A. N.; ARMSTRONG, R. C.; BROWN, R. A.; Spectral/Finite-Element Calculation of the Flow of a Maxwell Fluid Between Eccentric Rotating Cylinders. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**. n.22, p.129-167, 1987.
- [BIR77] BIRD, R. B.; ARMSTRONG, R. C.; HASSAGER, O.; Dynamics of Polymeric Liquids. **Fluid Mechanics**. Vol. I. Great Britian: John Wiley and Sons, 1977.
- [BUR93] BURMEISTER, L. C.; **Convective Heat Transfer**. Kasan: John Wiley & Sons, Inc., 1993. 619p.
- [BUT87] BUTCHER, J. C.; **The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and General Linear Methods**. Great Britain: John Wiley & Sons, 1987.
- [CRO84] CROCHET, M. J.; DAVIES, A. R.; WALTERS, K.; **Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow**. Netherlands: Elsevier Science Publishers, 1984.

- [DeB00] De BORTOLI, Á. L.; **Introdução à Dinâmica dos Fluidos Computacional**. Porto Alegre: Ed. UFRGS, 2000.
- [FER91] FERGUSON, J.; KEMBLOWSKI, Z.; **Applied Fluid Rheology**. Cambridge: Elsevier, 1991.
- [FOR00] FORTUNA, A. O.; **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. São Paulo: Ed USP, 2000.
- [FOX98] FOX, R. W.; McDONALD, A. T.; **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 1998.
- [GRE70] GREENSPAN, D.; CASUL, V.; **Numerical Analysis for Applied Mathematics, Science and Engineering**. Addison Wesley Publishing Co. Inc., 1970.
- [HAM95] HAMMAD, K. J.; VRADIS, G. C.; Non-Isothermal Controlled Shearing Rate Rheometry of a Yield-Pseudoplastic Fluid: Effects of Shear Heating. **Developments and Applications of Non-Newtonian Flows, ASME. FED-Vol. 231/AMD-Vol. 66**, p. 245-251, 1995.
- [HAW64] HAWARTH, L.; **Modern Developments in Fluid Dynamics**. Oxford: Clarendon Press, v.1 e v.2, 3.ed., 1964.
- [HOL72] HOLMAN, J. P.; **Heat Transfer**. United States of America: McGraw Hill, 1972.
- [HUG79] HUGHES, W. F.; BRIGHTON, J.; **Dinâmica dos Fluidos**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1979. 358p.
- [INC92] INCROPERA, F. P.; WITT, D. P.; **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 3.ed., 1992. 455p.
- [JAM81] JAMESON, A.; SCHMIDT, W.; TURKEL, E.; Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. **AIAA Paper**. 81-1259, 1981.
- [JUS99] JUSTO, D. A. R.; **Visual: uma Família de Softwares para a Visualização de Fenômenos em Mecânica dos Fluidos**. Laboratório Integrado de Computação Científica – LICC, Poto Alegre, 1999.
- [KEL00] KELLER, S. C.; **Desenvolvimento de um Técnica Numérica para Análise de Escoamentos em Cavidades para Rayleigh entre  $10^2$  e  $10^5$** . Dissertação de Mestrado – PPGMAp/UFRGS, Jun. 2000.
- [KIN94] KINCAID, D.; CHENEY, W.; **Análisis Numérico: Las Matemáticas del Cálculo Científico**. Estados Unidos: Addison-Wesley Iberoamericano, 1994. 718p.

- [LI94] LI, X. K.; DAVIES, A. R.; Thermal Boundary Conditions for Nonisothermal Viscoelastic Flow Between Eccentrically Rotating Cylinders. **Developments in Non-Newtonian Flows**, ASME. FED-Vol. 206/AMD-Vol. 191, pp. 31-50, 1994.
- [LOM99] LOMAX, H.; PULLIAM, T. H.; ZINGG, D. W.; **Fundamentals of Computational Fluid Dynamics**. [online] Disponível na Internet via WWW.URL: <http://www.cfd-online.com/Resources> Arquivo capturado em 26 de julho de 1999.
- [MAL95] MALISKA, C. R.; **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional: Fundamentos e Coordenadas Generalizadas**. Rio de Janeiro: Ed. LTC – Livros Técnicos e Científicos, 1995.
- [MIN98] MING-I, C.; HSU, Y.-H.; Computation of Buoyancy-Driven Flow in an Eccentric Centrifugal Annulus With a Non-Orthogonal Collocated Finite Volume Algorithm. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**. v.26, p. 323-343, 1998.
- [MIY93] MIYOSKI, K.; **Surface Diagnostics in Tribology: Fundamental Principales and Applications**. Singapore : World Scientific, 1993. 342p.
- [NAF00] NAFEMS – CFD Working Group. **Guidelines for Good Convergence in Computational Fluid Dynamics**. [online] Disponível na Internet via WWW.URL: <http://www.nafems.org/cfdwg/converge.html>. Arquivo capturado em 9 de maio de 2000.
- [OLD58] OLDROYD, J. G.; Non-Newtonian Effects in Steady Motion of some Idealized Elastico-Viscous Liquids. **Proc. Roy. Soc.** A245, p.278-297, 1958.
- [PAT81] PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. New York: Mc Graw-Hill, 1981.
- [PED00a] PEDROSO, C. A.; De BORTOLI, A. L.; Numerical Simulation of Bidimensional Incompressible Flows between Moving Surfaces. (por aparecer).
- [PED00b] PEDROSO, C. A.; De BORTOLI, A. L.; Simulação Numérica de Fluxos entre Superfícies Móveis. **XXIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional – CNMAC**. Santos - SP, Set. 2000.
- [PON95] PONTREALI, G.; Oldroyd-B Fluid Between two Concentric Circular Cylinders With Suction. **Developments and Applications of Non-Newtonian Flows**, ASME. FED-Vol. 231/AMD-Vol. 66, p. 211-215, 1995.
- [RAO99] RAO, J. H.; JENG, D. R.; De WITT, K. J.; Momentum and Heat Transfer in Power-Law Fluid With Arbitrary Injection/Suction at a Moving Wall. **International Journal of Heat and Mass-Transfer**. v.42, p.2837-2847, 1999.
- [RED94] REDDY, J. N.; GARTILING, D. K.; **The Finite Element Methods in Heat Transfer and Fluid Dynamics**. United States: CRC Press, 1994. 390 p.

- [RIZ98] RIZZI, A.; VOS, J.; Towards Establishing Credibility in Computational Fluid Dynamics Simulations. **AIAA Journal**. v.36, n.5, p.668-675, May 1998.
- [ROA71] ROACHE, P. J.; A New Direct Method for the Discretization Poisson Equation. **Proceedings of the Second International Conference on Numerical in Fluid Dynamics**. New York: Springer-Verlag, 1971.
- [ROB91] ROBERTS, A. D.; **Frontiers of Tribology**. Great Britain: Page Bros, 1991.
- [SAN98] SANTOS, L. C. C.; Introdução à Mecânica dos Fluidos Computacional. **XXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC**. São Paulo, 1998. 76p.
- [SAW98] SAWYER, W. G.; TICHY, J. A.; Non-Newtonian Lubrication With the Second-Order Fluid. **Journal of Tribology**. v.120, p. 622-628, July, 1998.
- [SCH68] SCHLICHTING, H., **Boundary Layer Theory**. New York: McGraw-Hill Books, 1968.
- [SCH81] SCHNEIDER, G. E.; ZEDAN, M.; A Modified Strongly Implicit Procedures for the Numerical Solutions of Field Problems. **Numerical Heat Transfer**. v.4, p. 1-19, 1981.
- [SHA73] SHAMES, I. H.; **Mecânica dos Fluidos: Princípios Básicos**. v.1; São Paulo: McGraw-Hill, 1973. 192p.
- [SHI90] SHIGLEY, J. E.; MISCHKE, C. R.; **Bearings and Lubrication: a Mechanical Designers Workbook**. N. York: McGraw-Hill, 1990.
- [SMI85] SMITH, G. D.; **Numerical Solution of Partial Differential Equations**. Oxford: Clarendon Press, 3.ed., 1985.
- [STR61] STREETER, V. L.; **Handbook of Fluid Dynamics**. New York: McGraw-Hill Books. 1.ed., p.33, 1961.
- [TAN92] TANNER, Roger I.; Engineering Rheology. **Oxford Engineering Science Series**. v.14, 3.ed., Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [TAV99] TAVARES, A.; **Simulação Numérica do Escoamento Incompressível Através de Canais Retos com Expansão Geometricamente Brusca**. Dissertação de Mestrado – PPGMAp/UFRGS, Ago. 1999.
- [TIC96] TICHY, J. A.; Non-Newtonian Lubrication with the Convected Maxwell Model. **Journal of Tribology**. v.118, p. 344-346, April, 1996.
- [VIL00] Vilastic Scientific Inc. **A Structural View of Rheology**. [online] Disponível na Internet via WWW.URL: <http://www.vilastic.com> Arquivo capturado em 5 de maio de 2000.

- [VIL00] Vilastic Scientific Inc. **Rheological Parameters for Viscoelastic Materials.** [online] Disponível na Internet via WWW.URL: <http://www.vilastic.com>\ Arquivo capturado em 5 de maio de 2000).
- [VRA98] VRADIS, G. C.; HAMMAD, K. J.; Strongly Coupled Block-Implicit Solutions Technique for Non-Newtonian Convective Heat Transfer Problems. **Numerical Heat Transfer. Part B: Fundamentals.** v.33, n.1, p. 79-97, Jan.-Feb. 1998.
- [WEN96] WENDT, J. H.; **Computational Fluid Dynamics.** Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [WHI91] WHITE, F. M.; **Viscous Fluid Flow.** New York: McGraw-Hill, 2.ed., 1991. 614p.
- [YAM90] YAMAGUCHI, Y.; **Tribology of Plastic Materials.** Amsterdam: Elsevier, 1990.
- [YOU71] YOUNG, David M.; **Iterative Solution of Large Linear Systems.** London: Academic Press, p.7-55, 1971.
- [ZIE89] ZIENKIEWICZ, D. C.; TAYLOR, R. L.; **The Finite Element Method: Basic Concepts and Applications.** New York: Mc Graw-Hill, 4.ed., 1989.

# APÊNDICE A

## A.1 CÁLCULO DAS MÉTRICAS $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$

As métricas da transformação de coordenadas representam a relação entre os planos físico e transformado, conforme indica a figura mencionada na seção 3 (Fig. 3.6). Os diferenciais em cada eixo coordenado no domínio transformado são dados pelas expressões,

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy, \quad (\text{A.1a})$$

$$d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy. \quad (\text{A.1b})$$

As métricas são facilmente definidas comparando as relações diferenciais (A.1):

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad [d^T] = [A][d^F], \quad (\text{A.2a})$$

com as relações diferenciais da transformação inversa,

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad [d^F] = [B][d^T], \quad (\text{A.2b})$$

onde  $d^T$  e  $d^F$  são os diferenciais no domínio transformado e no domínio físico, respectivamente. Obtém-se:

$$\begin{aligned} d^F &= B d^T & d^T &= A d^F \\ B^{-1} d^F &= B^{-1} B d^T & &\Downarrow \\ d^T &= B^{-1} d^F \Rightarrow & \therefore A &= B^{-1} \end{aligned}$$

Calculando  $B^{-1}$  resulta:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \bar{B}^T = \frac{1}{\det B} \cdot \text{adj } B,$$

onde  $\det B$  e  $\text{adj } B$  representam, respectivamente, o determinante e a matriz adjunta de  $B$ . E,

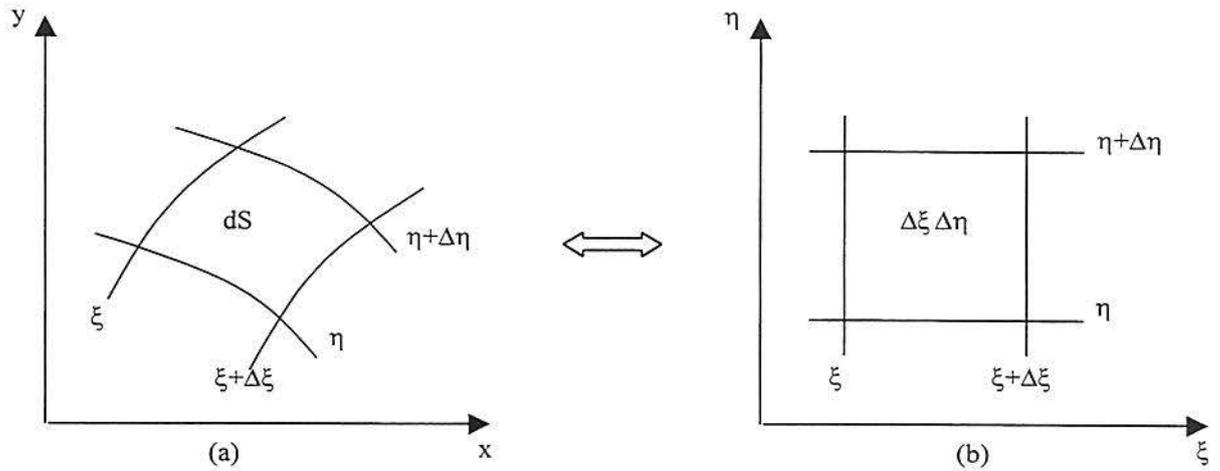


Fig. 3.6 – Áreas nos planos (a) físicos e (b) transformado [MAL95].

sendo  $\bar{B}^T$  a matriz transposta dos cofatores, cujos os elementos são dados por:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^{1+1} |y_\eta| = y_\eta, & \Delta_{12} &= (-1)^{1+3} |y_\xi| = -y_\xi, \\ \Delta_{21} &= (-1)^{2+1} |x_\eta| = -x_\eta, & \Delta_{22} &= (-1)^{2+2} |x_\xi| = x_\xi. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Logo,  $\bar{B}^{-1} = \begin{pmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{pmatrix}$ , de forma que,

$$A = B^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}} \begin{pmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

onde “J” é o Jacobiano da transformação, uma relação entre as áreas em cada um dos espaços, ou seja,

$$J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta} = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y = \frac{1}{\det[B]} = \det[A]. \quad (\text{A.5})$$

Conclui-se que a relação entre as métricas são dadas por

$$\begin{aligned} \xi_x &= Jy_\eta, & \xi_y &= -Jx_\eta, \\ \eta_y &= -Jy_\xi, & \eta_x &= Jx_\xi, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

e as métricas da transformada inversa são escritas na forma,

$$\begin{aligned} y_\eta &= \frac{1}{J} \xi_x, & x_\eta &= -\frac{1}{J} \xi_y, \\ y_\xi &= -\frac{1}{J} \eta_x, & x_\xi &= \frac{1}{J} \eta_y. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

As expressões para o cálculo das métricas  $\xi_{xx}$ ,  $\xi_{yy}$ ,  $\eta_{xx}$  e  $\eta_{yy}$  são definidas na seção seguinte.

## A.2 CÁLCULO DAS MÉTRICAS $\xi_{xx}$ , $\xi_{yy}$ , $\eta_{xx}$ , $\eta_{yy}$

Para a derivada de segunda ordem resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_x \frac{\partial \eta}{\partial x}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde,

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_x = \frac{\partial \Psi^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \Psi_{\xi\xi} \xi_x + \Psi_{\xi\eta} \eta_x, \quad (\text{A.9a})$$

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_x = \frac{\partial \Psi^2}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \Psi_{\eta\xi} \xi_x + \Psi_{\eta\eta} \eta_x. \quad (\text{A.9b})$$

Substituindo (A.9a) e (A.9b) em (A.8) obtém-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \xi_{xx} + (\Psi_{\xi\xi} \xi_x + \Psi_{\xi\eta} \eta_x) \xi_x + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \eta_{xx} + (\Psi_{\eta\xi} \xi_x + \Psi_{\eta\eta} \eta_x) \eta_x, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \Psi_\xi \xi_{xx} + \Psi_\eta \eta_{xx} + \Psi_{\xi\xi} \xi_x^2 + \Psi_{\eta\eta} \eta_x^2 + 2\Psi_{\xi\eta} \xi_x \eta_x. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

De forma análoga, a derivada segunda da função  $\Psi$  em relação a “y” é obtida,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \Psi_\xi \xi_{yy} + \Psi_\eta \eta_{yy} + \Psi_{\xi\xi} \xi_y^2 + \Psi_{\eta\eta} \eta_y^2 + 2\Psi_{\xi\eta} \xi_y \eta_y, \quad (\text{A.11})$$

Fazendo  $\psi = x$  e  $\psi = y$  na equação (A.10), obtém-se um sistema de equações cujas incógnitas são  $\xi_{xx}$  e  $\eta_{xx}$  da forma:

$$\begin{aligned} 0 &= x_\xi \xi_{yy} + x_\eta \eta_{yy} + x_{\xi\xi} \xi_y^2 + x_{\eta\eta} \eta_y^2 + 2x_{\xi\eta} \xi_y \eta_y, \\ 0 &= y_\xi \xi_{yy} + y_\eta \eta_{yy} + y_{\xi\xi} \xi_y^2 + y_{\eta\eta} \eta_y^2 + 2y_{\xi\eta} \xi_y \eta_y, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_{xx} \\ \eta_{xx} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} x_{\xi\xi} \xi_y^2 + x_{\eta\eta} \eta_y^2 + 2x_{\xi\eta} \xi_y \eta_y \\ y_{\xi\xi} \xi_y^2 + y_{\eta\eta} \eta_y^2 + 2y_{\xi\eta} \xi_y \eta_y \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} E_1 \\ F_1 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Lembre que as métricas  $\xi_x$  e  $\eta_x$  já são conhecidas, permitindo generalizar as expressões de  $E_1$  e  $F_1$ . O sistema anterior (Eq. A.13) fornece para  $\xi_{xx}$ :

$$\xi_{xx} = \frac{\begin{bmatrix} -E_1 & x_\eta \\ -F_1 & y_\eta \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}} = \frac{-E_1 y_\eta + F_1 x_\eta}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} = -J(E_1 y_\eta + F_1 x_\eta). \quad (\text{A.14})$$

Considerando as métricas inversas  $y_\eta = \frac{1}{J} \xi_x$  e  $x_\eta = -\frac{1}{J} \xi_y$  pode-se reescrever (A.14) na seguinte forma,

$$\xi_{xx} = -(E_1 \xi_x + F_1 \xi_y). \quad (\text{A.15})$$

Resolvendo o sistema para  $\eta_{xx}$  obtém-se,

$$\eta_{xx} = \frac{\begin{bmatrix} x_\xi & -E_1 \\ y_\xi & -F_1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}} = \frac{-F_1 x_\xi + E_1 y_\xi}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} = -J(-F_1 x_\xi + E_1 y_\xi), \quad (\text{A.16})$$

que pode ser reescrito pelas métricas inversas  $y_\xi = -\frac{1}{J} \eta_x$  e  $x_\xi = \frac{1}{J} \eta_y$ , como

$$\eta_{xx} = -(F_1 \eta_y - E_1 \eta_x). \quad (\text{A.17})$$

De forma semelhante, fazendo  $\Psi$  igual a “x” e “y” na equação (A.10) e resolvendo o sistema de equações gerado, encontra-se as seguintes expressões para  $\xi_{yy}$  e  $\eta_{yy}$ :

$$\xi_{yy} = -(E_2 \xi_x + F_2 \xi_y), \quad (\text{A.18})$$

$$\eta_{yy} = -(E_2 \eta_x - F_2 \eta_y). \quad (\text{A.19})$$

## APÊNDICE B

Apresenta-se, neste apêndice, a adimensionalização das equações diferenciais utilizadas para as simulações numéricas.

### B.1 ADIMENSIONALIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

A equação da Conservação da Massa (continuidade), equação (2.2) do item 2.2.1,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (\text{B.1})$$

torna-se adimensional ao considerar as seguintes variáveis adimensionais:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \frac{u}{U_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{U_\infty}.$$

Logo,

$$\frac{U_\infty}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{U_\infty}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (\text{B.2})$$

que multiplicado por  $\frac{U_\infty}{L}$ , obtém-se a seguinte equação sem os indicadores adimensionais (sobrescritos asteriscos),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (\text{B.3})$$

### B.2 ADIMENSIONALIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA CQM<sub>x</sub>

Considera-se a equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção x, equação (2.9) do item 2.2.2, sem a força de corpo,

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (\text{B.4})$$

e introduz-se as variáveis adimensionais que se seguem, independentes e dependentes (as dependentes indicadas por asteriscos),

$$t^* = \frac{tU_\infty}{L}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \frac{u}{U_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{U_\infty}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U_\infty^2},$$

$$\tau_{xx}^* = \frac{\tau_{xx}}{\mu U_\infty / L}, \quad \tau_{yy}^* = \frac{\tau_{yy}}{\mu U_\infty / L}, \quad \tau_{xy}^* = \frac{\tau_{xy}}{\mu U_\infty / L}.$$

O procedimento de tornar adimensional a equação diferencial da CQM<sub>x</sub>, é feito considerando, como exemplo, quatro termos típicos da equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(u/U_\infty)U_\infty}{\partial\left(\frac{U_\infty t}{L}\right)\frac{L}{U_\infty}} = \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t^*},$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = U_\infty \left(\frac{u}{U_\infty}\right) \frac{\partial(u/U_\infty)U_\infty}{\partial(x/L)L} = \frac{U_\infty^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial(y/L)L} \left[\frac{\partial(u/U_\infty)U_\infty}{\partial(y/L)L}\right] = \frac{U_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}},$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\tau_{xy}}{\mu U_\infty / L}\right)\frac{L}{\mu U_\infty}}{\partial(x/L)L} = \frac{\mu U_\infty}{L^2} \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x^*}.$$

Seguindo-se este procedimento, a equação diferencial da CQM<sub>x</sub> pode ser escrita como

$$\frac{\rho U_\infty^2}{L} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* u^*)}{\partial y^*} \right) = -\frac{\rho U_\infty^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu U_\infty}{L^2} \left( \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y^*} \right). \quad (B.5)$$

Dividindo a equação (B.5) por  $\rho U_\infty^2 / L$  obtém-se

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* u^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho U_\infty L} \left( \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y^*} \right), \quad (B.6)$$

onde a quantidade adimensional  $\frac{\mu}{\rho U_{\infty} L}$  é o inverso do parâmetro adimensional de Reynolds.

Por simplicidade, admite-se a seguinte equação adimensional para  $CQM_x$  sem os indicadores aтерiscos,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right). \quad (\text{B.7})$$

### B.3 ADIMENSIONALIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA $CQM_y$

Considera-se agora a equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção  $y$  com a aproximação de Boussinesq, equação (2.63) do item 2.4.2, com  $\tau_{yx}$  igual a  $\tau_{xy}$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \rho_{\infty} \beta (T - T_{\infty}) g, \quad (\text{B.8})$$

e introduz-se, além das variáveis adimensionais já citadas, a expressão adimensional para a temperatura,

$$T^* = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}.$$

Então, de maneira análoga à adimensionalização da equação  $CQM_x$ , obtém-se,

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* v^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* v^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\mu}{\rho U_{\infty} L} \left( \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial y^*} \right) - \rho \beta (\Delta T) \frac{gL}{\rho U_{\infty}^2} T^*. \quad (\text{B.9})$$

Trabalhando separadamente o último termo da expressão acima, multiplicado-a por

$$\left( \frac{L\rho\mu}{L\rho\mu} \right)^2,$$

$$\rho \beta (\Delta T) \frac{L}{\rho U_{\infty}^2} \left( \frac{L\rho\mu}{L\rho\mu} \right)^2 = \frac{g\beta\rho^2 L^3 \cdot \Delta T}{\mu^2} \left( \frac{\mu}{\rho L U_{\infty}} \right)^2,$$

que pode ser escrito como:

$$\text{Gr} \frac{1}{\text{Re}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}^2},$$

Finalmente, reescrevendo a equação da quantidade de movimento em  $y$  com a aproximação de Boussinesq, em função dos parâmetros adimensionais, esta pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* v^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* v^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial y^*} \right) - \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}^2} T^*; \quad (\text{B.10})$$

que na forma simplificada (sem indicadores asteriscos), resulta

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) - \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}^2} T. \quad (\text{B.11})$$

#### B.4 ADIMENSIONALIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA PRESSÃO

O procedimento para obtenção da equação da pressão, equação (2.16) do item 2.2.3,

$$\nabla^2 p = \rho \left[ \frac{\partial^2(uu)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2(uv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(vv)}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (\text{B.12})$$

na forma adimensionalizada, é semelhante ao já mencionado para equação  $\text{CQM}_x$ , por isso, simplesmente apresenta-se esta equação adimensionalizada,

$$\nabla^2 p = \left[ \frac{\partial^2(uu)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2(uv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(vv)}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (\text{B.13})$$

#### B.5 ADIMENSIONALIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA TEMPERATURA

A equação da Temperatura, equação (2.26) do item 2.2.4,

$$\rho C_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \kappa \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}, \quad (\text{B.14})$$

será adimensionalizada considerando as mesmas variáveis adimensionais já citadas, resultando:

$$\rho C_p \frac{U_\infty}{L} (T_w - T_\infty) \left[ \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right] = \kappa \frac{(T_w - T_\infty)}{L^2} \left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right] +$$

$$\frac{U_\infty}{L} \frac{\mu U_\infty}{L} \left[ \frac{\partial(u^* \tau_{xx}^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(u^* \tau_{xy}^*)}{\partial y^*} + \frac{\partial(v^* \tau_{xy}^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* \tau_{yy}^*)}{\partial y^*} \right]$$

e multiplicado por  $\frac{L}{\rho C_p (T_w - T_\infty) U_\infty}$  a mesma pode ser rescrita como,

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{\kappa}{L \rho C_p U_\infty} \underbrace{\left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right]}_{(II)} +$$

$$\frac{\mu U_\infty}{L \rho C_p (T_w - T_\infty)} \underbrace{\left[ \frac{\partial(u^* \tau_{xx}^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(u^* \tau_{xy}^*)}{\partial y^*} + \frac{\partial(v^* \tau_{xy}^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* \tau_{yy}^*)}{\partial y^*} \right]}_{(III)}. \quad (B.15)$$

Agora, multiplicando o termo (II) por  $\frac{\mu}{\mu}$  e o termo (III) por  $\frac{U_\infty}{U_\infty}$  da equação (B.15)

resulta,

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{\kappa}{\mu C_p} \frac{\mu}{\rho U_\infty L} \left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right] +$$

$$\frac{U_\infty^2}{C_p (T_w - T_\infty)} \frac{\mu}{\rho L U_\infty} \left[ \frac{\partial(u^* \tau_{xx}^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(u^* \tau_{xy}^*)}{\partial y^*} + \frac{\partial(v^* \tau_{xy}^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* \tau_{yy}^*)}{\partial y^*} \right].$$

Finalmente, escrevendo a equação adimensionalizada da Temperatura sem os indicadores obtém-se,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr Re} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] +$$

$$\frac{Ec}{Re} \left[ \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} \right]. \quad (B.16)$$

## B.6 ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS COMPLEMENTARES DE “UCM”

Considerando os mesmos adimensionais citados aplicados à equação para a tensão  $\tau_{xx}$  do modelo *Convected Maxwell* (2.50) do item 2.3.6,

$$\tau_{xx} + \lambda \left( u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \tau_{xx} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} \right) = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\text{B.17})$$

segundo a mesmo procedimento de adimensionalização, a mesma pode ser escrita na forma,

$$\frac{\mu U_\infty}{L} \tau_{xx}^* + \lambda \frac{\mu U_\infty^2}{L^2} \left( u^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial y^*} - 2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \tau_{xx}^* - 2 \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \tau_{xy}^* \right) = 2\mu \frac{U_\infty}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}.$$

Multiplicando toda a expressão por  $\frac{L}{\mu U_\infty}$  resulta

$$\tau_{xx}^* + \frac{U_\infty \lambda}{L^2} \left( u^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial y^*} - 2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \tau_{xx}^* - 2 \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \tau_{xy}^* \right) = 2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*}. \quad (\text{B.18})$$

E considerando que  $\frac{U_\infty \lambda}{L^2} = \text{Re}$ , obtém-se a seguinte equação adimensionalizada para a tensão  $\tau_{xx}$

$$\tau_{xx} + \text{De} \left( u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \tau_{xx} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} \right) = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{B.18a})$$

As equações para as tensão  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yy}$ , obtidas de forma análoga são:

$$\tau_{xy} + \text{De} \left( u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} - \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xx} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (\text{B.18b})$$

$$\tau_{yy} + \text{De} \left( u \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \tau_{yy} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xy} \right) = 2 \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (\text{B.18c})$$